

ЛЕКЦИЯ 1 МЕТОД ПРОЕКЦИРОВАНИЯ

1.1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКЦИРОВАНИЕ

Центральное проектирование является наиболее общим случаем получения проекций геометрических фигур.

В основу построения любого изображения положена операция проектирования, которая заключается в следующем: в пространстве выбирают произвольную точку S – центр проектирования, и плоскость, не проходящую через точку S – плоскость проектирования π_1 (рис.1).

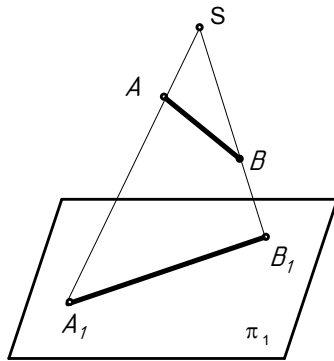


Рис. 1.

(рис.1).

$A \notin \pi_1, A \neq S, A, B$ – точки в пространстве S – центр проекций $\square SA), \square SB)$ – проектирующие лучи $A_1; B_1$ – проекции точек A и B

π_1 – плоскость проекций

$[SA) \cap \pi_1 = A_1$

$[SB) \cap \pi_1 = B_1$

Чтобы спроецировать точку A пространства на плоскость π_1 , через центр проектирования S и точку A проводят прямую до ее пересечения с плоскостью проекций

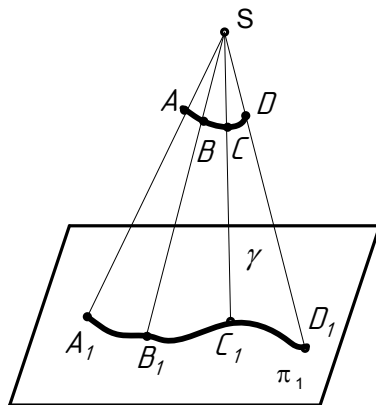


Рис. 2.

Проекцией фигуры называют множество проекций всех ее точек.

Проекция криволинейной фигуры представляет собой линию пересечения проектирующей поверхности γ и плоскости проекций (рис.2).

Свойства центрального проектирования:

Так как через две различные точки можно провести одну и только одну прямую, то при заданном центре проектирования и плоскости проекций, каждая точка пространства будет иметь одну и только одну центральную проекцию.

Обратное утверждение – каждой центральной проекции точки однозначно соответствует точка пространства, не имеет смысла. Поэтому одна центральная проекция точки не дает возможности судить о положении самой точки в пространстве. Для того, чтобы сделать возможным определение положения точки в пространстве по ее центральным проекциям, необходимо иметь две центральные проекции этой точки, полученные из двух различных центров (рис.3).

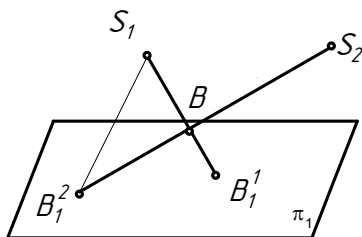


Рис.3.

1.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКЦИРОВАНИЕ

Широкое применение в практике получил тот случай, когда центр проектирования удален в бесконечность. Проектирующие лучи при этом параллельны между собой, и проекции точек, фигур и тел получают названия параллельных проекций.

В свою очередь параллельные проекции подразделяются на прямоугольные и косоугольные.

В первом случае плоскость проекций с направлением проецирования образует угол 90° , а во втором не равный 90° (рис.4 и рис.5).

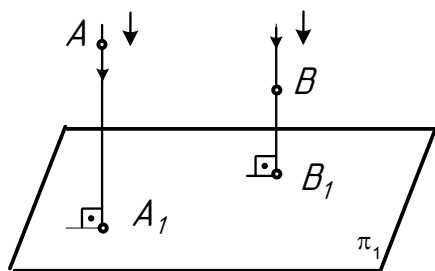


Рис. 4.

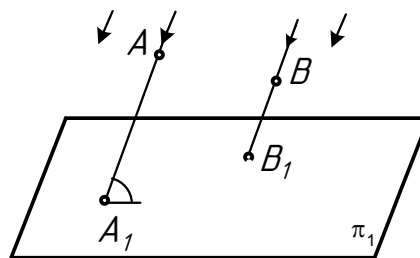


Рис.5.

Каждой точке пространства соответствует только одна параллельная проекция. Обратное утверждение не имеет смысла.

Для определения точки в пространстве необходимо иметь две ее параллельные проекции, полученные при различных направлениях проецирования (рис.6).

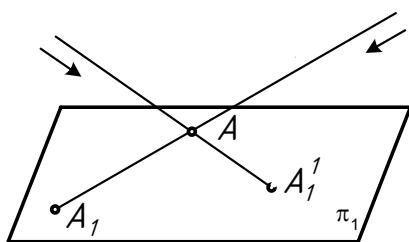


Рис. 6.

В дальнейшем мы будем пользоваться параллельными проекциями, ортогональными (прямоугольными) и аксонометрическими, причем первые будут прямоугольными, а вторые прямоугольными и косоугольными.

1. 3. Ортогональные проекции точки (Эпюр Монжа).

Сущность метода ортогонального проецирования заключается в том, что предмет проецируется на две взаимно перпендикулярные плоскости лучами, ортогональными (перпендикулярными) к этим двум плоскостям.

Одну из этих плоскостей проекций π_1 располагают горизонтально, а вторую π_2 — вертикально. Плоскость π_1 называется горизонтальной плоскостью проекций, π_2 — фронтальной. Плоскости π_1 и π_2 бесконечны и непрозрачны. Линия пересечения плоскостей проекций называется осью проекций (координат) и обозначается ОХ.

Плоскости проекций делят пространство на четыре двугранных угла (четверти) I, II, III, IV (рис.7).

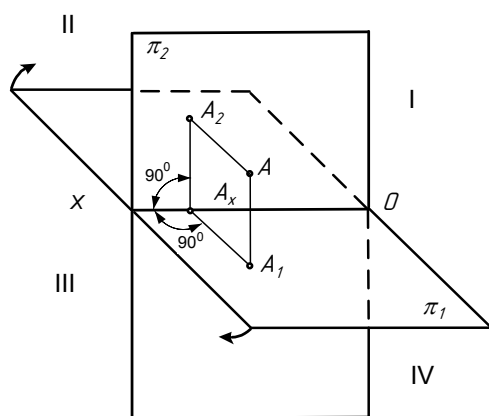


Рис.7. Система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций

При построении проекций необходимо помнить, что ортогональной проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость.

A_1 — горизонтальная проекция точки A

A_2 — фронтальная проекция точки A

Проецирующие лучи определяют плоскость α ($[AA_2] \cap [AA_1]$) перпендикулярную плоскостям проекций и линии их пересечения — оси ОХ. Эта плоскость пересекает π_1 и π_2 по отрезкам прямых $[A_1A_x]$ и $[A_2A_x]$, которые образуют с осью X и друг с другом прямые углы с вершиной в точке A_x

$AA_1 = A_2A_x$ — расстояние от точки A до π_1

$AA_2 = A_1A_x$ — расстояние от точки A до π_2

Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости вполне определяют положение точки в пространстве.

Построение проекций точек в 4-х угловых пространствах показано на рис.8.

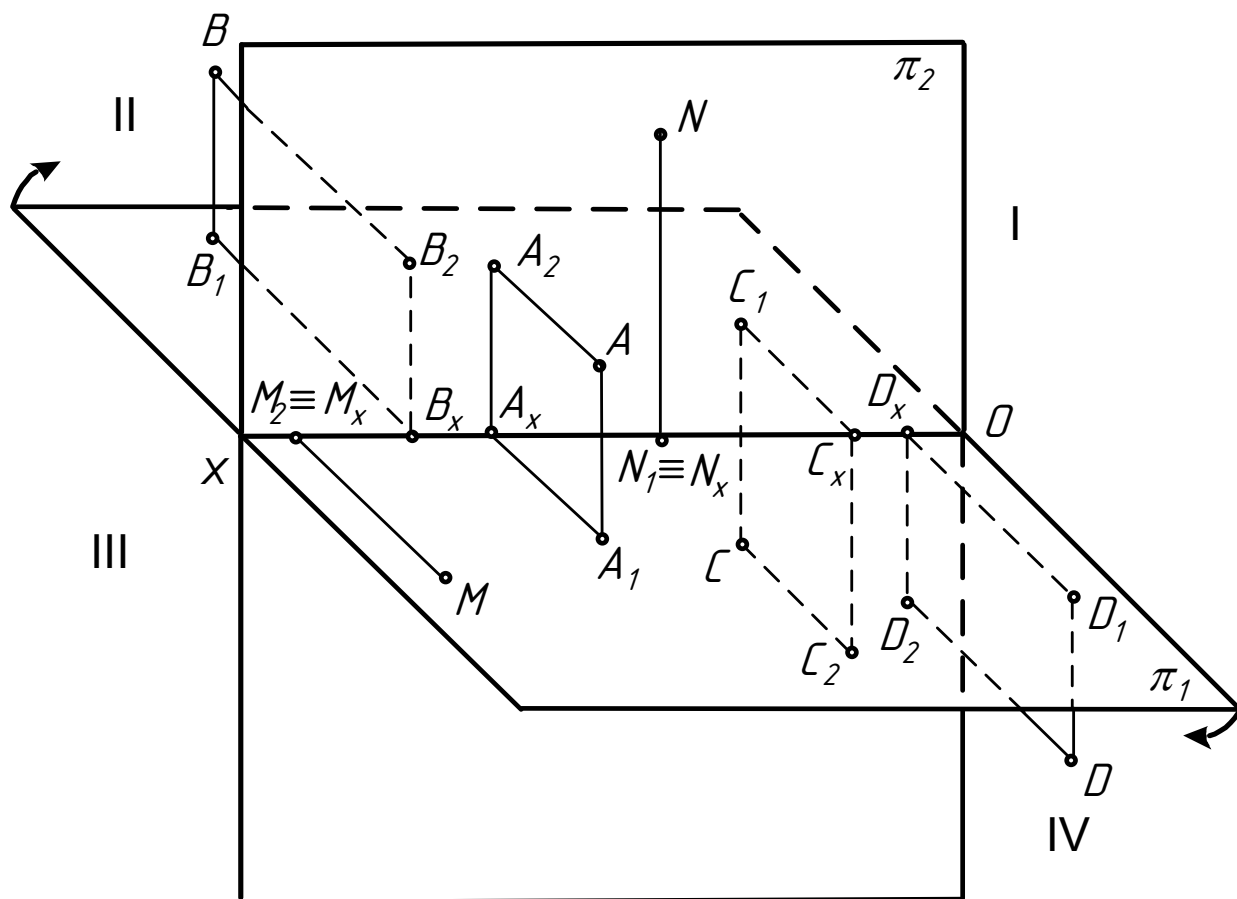


Рис.8.

Чтобы получить плоский чертеж, плоскость π_1 совмещают вращением вокруг оси OX с плоскостью π_2 .

Проекционный чертеж, на котором плоскости проекций со всем тем, что на них изображено, совмещены определенным образом одна с другой, называется эпюром Монжа (рис.9).

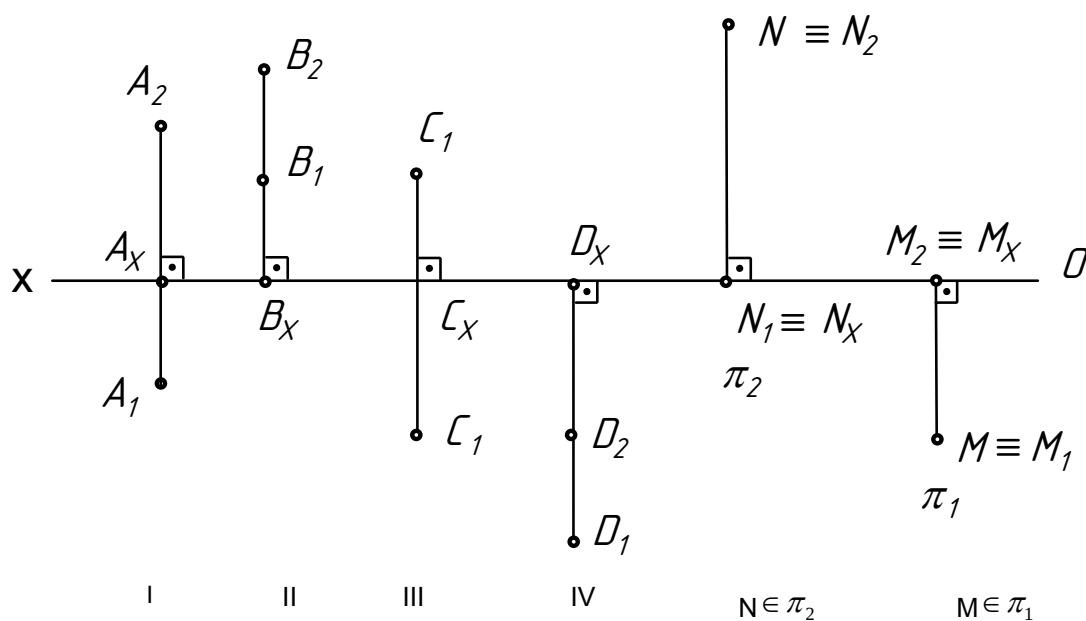


Рис.9.

Проекции одной и той же точки на две взаимно перпендикулярные плоскости располагаются на прямой, перпендикулярной оси проекций x_{12} .

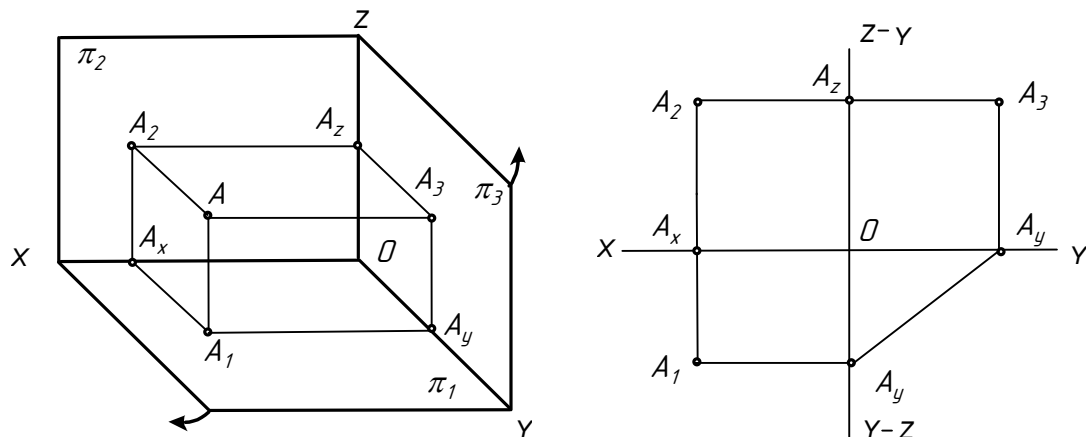
Эта прямая называется направлением проецирования или линией проекционной связи.

1.4. ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ТРЕХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Две проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве. Так как каждая фигура или тело представляют собой совокупность точек, то можно утверждать, что две ортогональные проекции предмета вполне определяют его форму.

Однако на практике часто возникает необходимость создания дополнительных проекций. π_3 - профильная плоскость проекции $[AA_3] \perp \pi_3$ (рис.10).

$$\pi_1 \perp \pi_2 \perp \pi_3$$



Проекция точек на профильную плоскость проекций называются профильными проекциями – A_3 .

Плоскости проекций попарно пересекаясь определяют три оси OX; OY и OZ, которые можно рассматривать как систему прямоугольных декартовых координат в пространстве с началом в точке O.

$A_1A_y = X$ – абсцисса (расстояние от точки до π_3)

$A_1A_x = Y$ – ординат (расстояние от точки до π_2)

$A_2A_x = Z$ – аппликата (расстояние от точки до π_1)

Длины проецирующих перпендикуляров, определяющих расстояние точки до плоскостей проекций, являются координатами точки. Задание точки осуществляется в следующем виде: A (X, Y, Z). Знаки координат X, Y, Z в четырех угловых пространствах показаны в таблице1.

Таблица 1

	X	Y	Z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-

1.5. БИСЕКТОРНЫЕ ПЛОСКОСТИ (ПЛОСКОСТЬ СИММЕТРИИ И ПЛОСКОСТЬ ТОЖДЕСТВА)

Плоскость, которая проходит через I и III угловые пространства и делит их пополам, называется плоскостью симметрии и обозначается σ (рис. 11).

Плоскость, которая проходит через II и IV угловые пространства и делит их пополам, называется плоскостью тождества и обозначается τ (рис. 12).

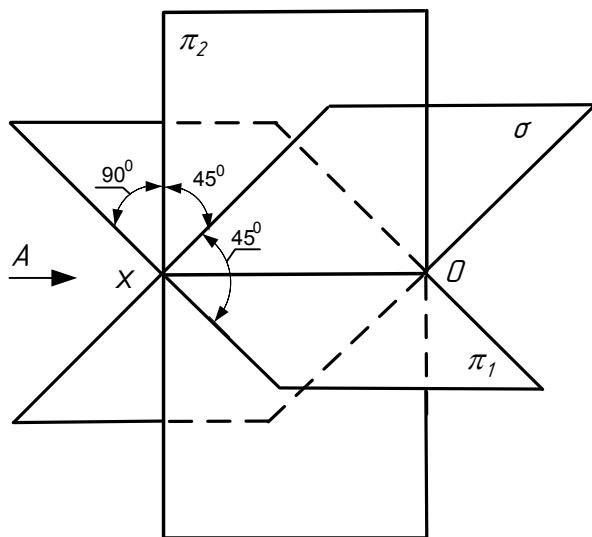


Рис. 11

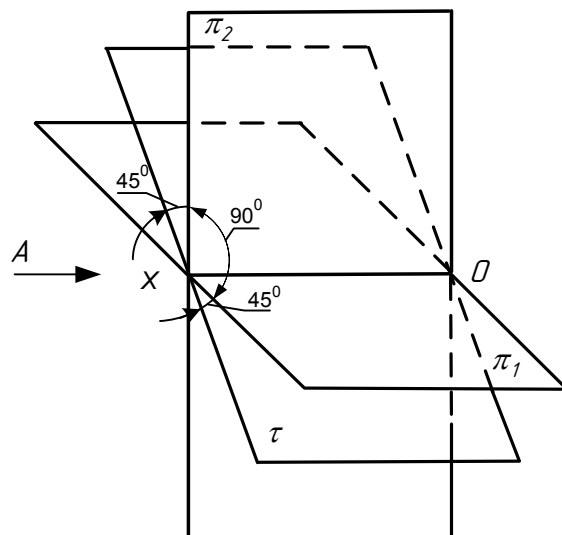


Рис. 12.

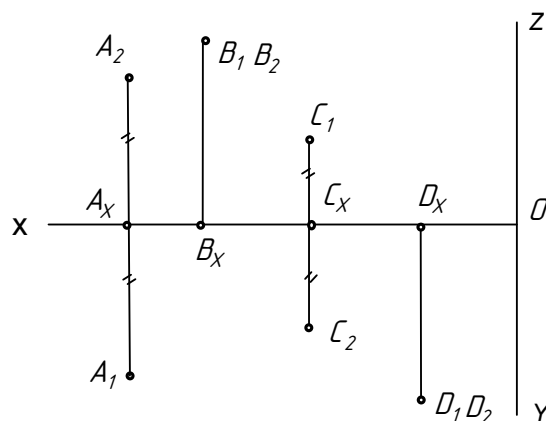
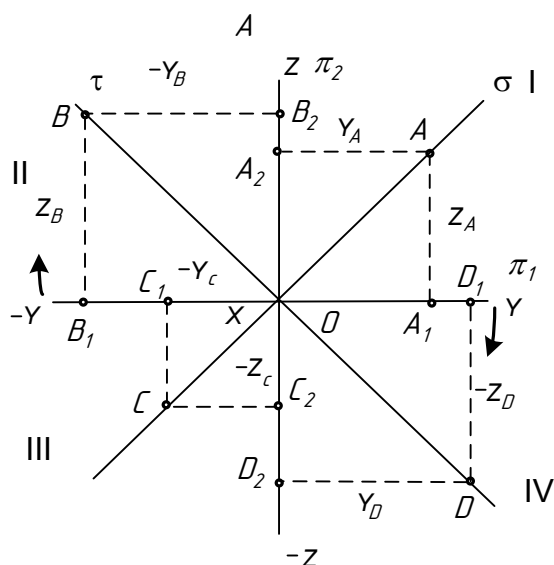


Рис. 13.

На рис.13 изображен вид A пересекающихся плоскостей π_1 ; π_2 ; σ ; τ , на котором легко определяются координаты точек A, B, C, D, принадлежащих плоскостям σ и τ .

Координаты Y и Z точек, лежащих на плоскости симметрии одинаковы по величине и по знаку: $Y_A = Z_A$; $-Y_C = Z_C$.

Координаты Y и Z точек, лежащих на плоскости тождества одинаковы по величине, но противоположны по знаку: $-Y_B = Z_B$; $Y_D = -Z_D$.

1.6. ТОЧКИ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО БИСЕКТОРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ.

Пусть точка L симметрична точке K относительно σ (рис.14). Тогда координата Y_K равна по величине и по знаку координате Z_L ($Y_K = Z_L$), а координата Z_K равна по величине и по знаку координате Y_L ($Z_K = Y_L$).

Координаты Y и Z точек, симметричных относительно плоскости симметрии, равны по величине и по знаку координатам Z и Y заданных точек.

Пусть точка D симметрична точке A относительно оси проекций OX. У точек, симметричных относительно оси проекций OX, координаты $A(X, Y, Z)$; $D(X, -Y, -Z)$.

ЛЕКЦИЯ 2

2.1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

Для построения изображения прямой линии на плоскостях проекций достаточно построить проекции двух точек этой прямой (рис.1).

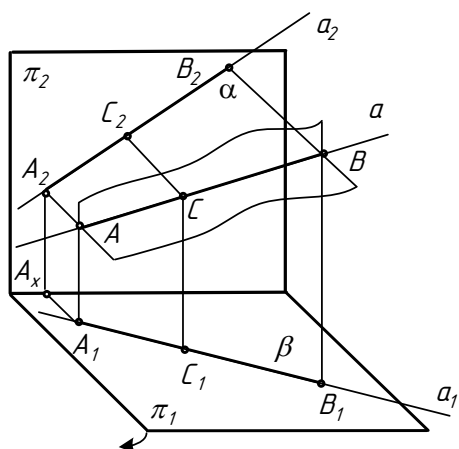


Рис.1

$$\alpha([BB_2] \parallel [AA_2]) \cap \pi_2 = a_2$$

$$\beta([AA_1] \parallel [BB_1]) \cap \pi_1 = a_1$$

α – прямая в пространстве, a_1 – горизонтальная проекция прямой, a_2 – фронтальная проекция прямой.

Проекция прямой линии есть также прямая линия.

Точка, лежащая на прямой линии, имеет свои проекции на соответствующих проекциях прямой. $C_1 \in [A_1B_1]$; $C_2 \in [A_2B_2]$.

В каком отношении точка делит отрезок прямой линии в пространстве, в таком же отношении проекции этой точки делят соответствующие проекции отрезка.

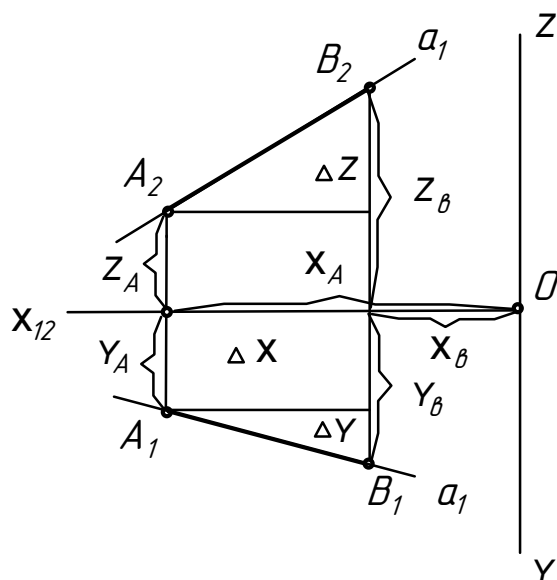
$$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{[A_1C_1]}{[C_1B_1]} = \frac{[A_2C_2]}{[C_2B_2]}.$$

Совмещая плоскости проекций π_1 и π_2 строим

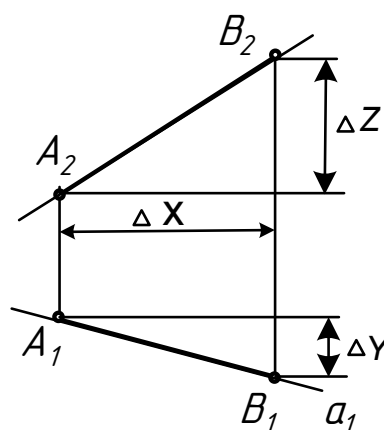
эпюр отрезка $[AB]$. Так как в дальнейшем будут рассматриваться только безосные эпюры, определим разницу между эпюром с осями и безосным эпюром.

По эпюру с осями можно определить положение точек A и B в пространстве по координатам X, Y, Z . Безосный эпюр точек A и B не определяет их положение в пространстве, но позволяет судить об их относительности ориентировке (рис.2).

ΔX характеризует смещение точки A по отношению к точке B в направлении параллельном π_1 и π_2 . Относительное смещение точки в направлении перпендикулярном плоскости π_2 определяется отрезком ΔY ; отрезок ΔZ показывает превышение точки B над точкой A .



Эпюр с осями



Безосный эпюр

Рис.2.

Положение прямой относительно плоскостей проекций.

1. Прямыми общего положения называются прямые, не параллельные ни одной из плоскостей проекций (рис.1, 2, 3).

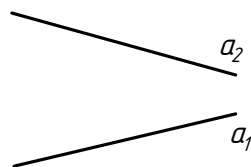


Рис. 3

2. Прямые уровня - прямые, параллельные плоскостям проекций.

а) Прямые, параллельные горизонтальной плоскости проекций, называются горизонтальными прямыми или горизонталями (рис.4)

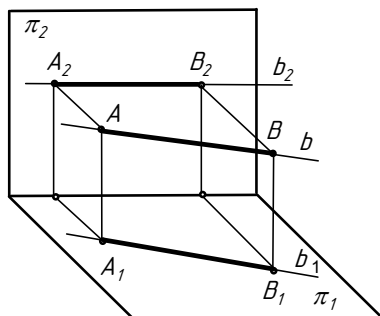
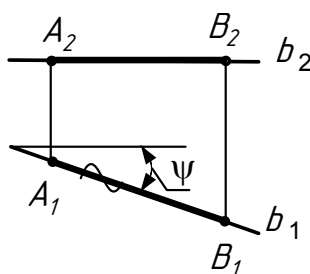


Рис.4.



$[AB] \in b$
 $[A_1B_1] \in b_1$
 $[A_2B_2] \in b_2$

$b_2 \perp$ линии связи;
 $b_2 \parallel OX$
 b_1 — конгруэнтна самой прямой

параллельная π_2 , называется фронтальной прямой или фронталью (рис.5).

б) Прямая,

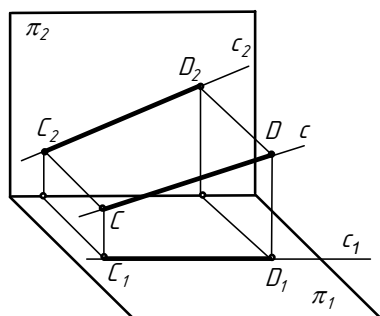
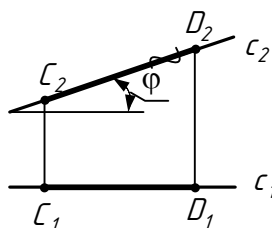


Рис. 5



$[CD] \in c$
 $[C_1D_1] \in c_1$
 $[C_2D_2] \in c_2$

$c_1 \perp$ линии связи
 $c_1 \parallel OX$
 c_2 — конгруэнтна самой прямой

в) Прямая, параллельная π_3 называется профильной прямой (рис.6). $d_2 \perp OX$, $d_1 \perp OX$, d_3 — конгруэнтна самой прямой.

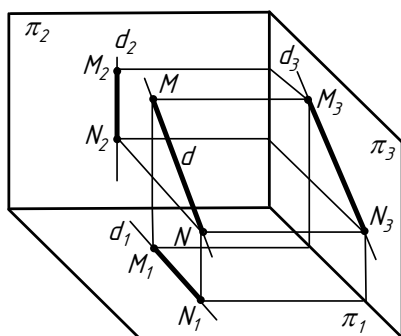
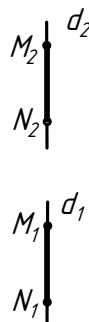


Рис.6.



$[MN] \in d$
 $[M_1N_1] \in d_1$
 $[M_2N_2] \in d_2$

3. Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называются проецирующими.

Прямая, перпендикулярная π_1 , называется горизонтально-проецирующей прямой. Одна из проекций превращается в точку, а другая совпадает с линией проекционной связи и конгруэнтна самой прямой (рис.7). $n \perp \pi_1$, $[AB] \in n$; $[A_2B_2] \in n_2$; $A_1 \equiv B_1 \equiv n_1$.

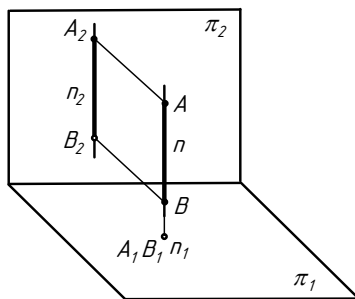
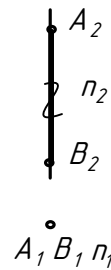


Рис. 7



Прямая, перпендикулярная π_2 , называется фронтально-проецирующей прямой (рис.8).
 $m \perp \pi_2$, $[CD] \in m$; $[C_1D_1] \in m_1$; $C_2 \equiv D_2 \equiv m_2$; m_1 конгруэнтна m .

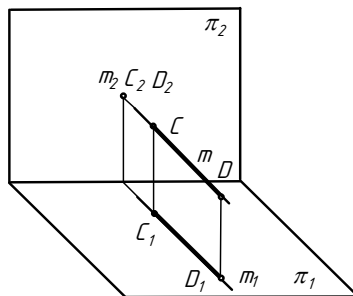
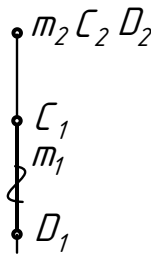


Рис. 8



Прямая, перпендикулярная π_3 , называется профильно-проецирующей прямой (рис.9).
 $\ell \perp \pi_3$, $[MN] \in \ell$; $[M_1N_1] \in \ell_1$; $[M_2N_2] \in \ell_2$; $[M_1N_1] = [M_2N_2] = [MN]$.

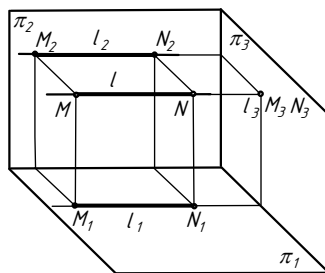
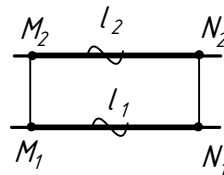


Рис. 9



Прямая, параллельная плоскости симметрии σ (рис.10).
 Прямая, параллельная плоскости тождества τ (рис.11).

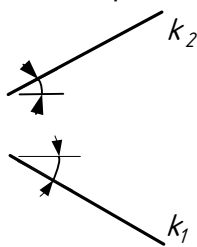


Рис. 10

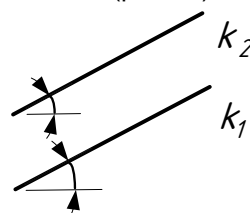


Рис.11

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ЛИНИИ И УГЛОВ НАКЛОНА ЕЕ К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

Величина отрезка прямой линии в пространстве выражается гипотенузой прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка на плоскость, а другой разности удалений концов отрезка от той же плоскости проекций (рис.12).

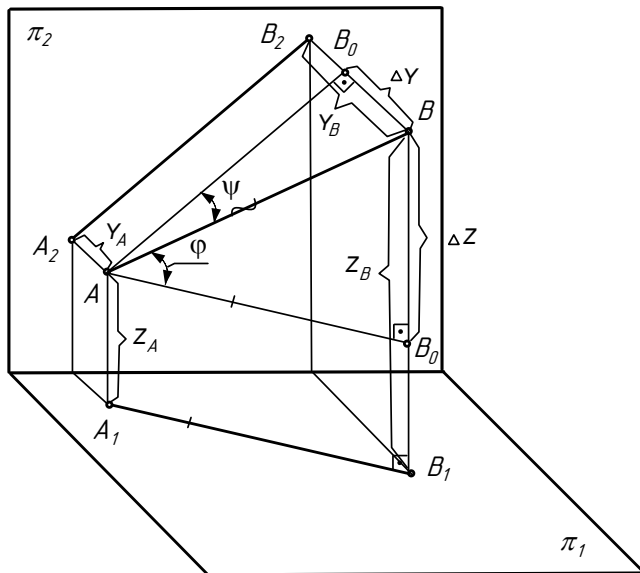


Рис.2.12

$AB_0 \parallel A_1B_1$
 $\triangle ABB_0$ – прямоугольный
 AB - истинная величина отрезка
 $AB_0 = A_1B_1$
 $BB_0 = Z_B - Z_A = \Delta Z$
 $BB_1 = Z_B$; $B_0B_1 = AA_1 = Z_A$
 $\angle \phi$ – угол наклона прямой к
 плоскости проекций π_1
 $\angle \psi$ – угол наклона прямой к
 плоскости проекций π_2

Истинная величина отрезка $[AB]$ определяется гипотенузой прямоугольного треугольника, у которого один катет $[AB_0]=[A_1B_1]$, а второй $\Delta Z = Z_B - Z_A$. Угол ϕ определяется между отрезком $[AB]$ и горизонтальной проекцией $[A_1B_1]=[AB_0]$.

Истинная величина отрезка определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет $[AB_0]=[A_1B_1]$, а второй $\Delta Y = Y_B - Y_A$. Угол ψ определяется между отрезком $[AB]$ и фронтальной проекцией $[A_2B_2]=[AB_0]$.

Рассмотрим пример определения истинной величины отрезка $[AB]$ на эпюре (рис.13).

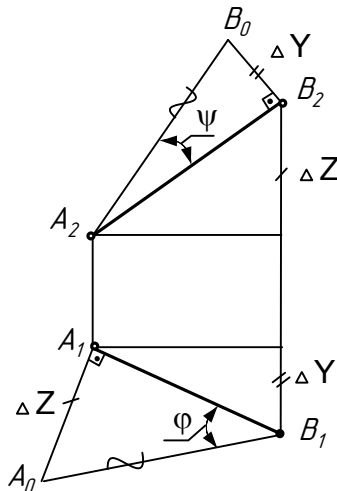


Рис. 13

2.3. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Если две прямые в пространстве параллельны, то и параллельны между собой одноименные проекции прямых. Если $a \parallel b$, то $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$.

Для того, чтобы судить о параллельности двух прямых общего положения в пространстве, необходима и достаточна параллельность их проекций на двух плоскостях проекций (рис.14).

Параллельность профильных прямых не может быть определена по фронтальным и горизонтальным проекциям этой прямой. Для оценки их взаимного положения необходимо обратиться к профильной проекции, по которой и делают окончательный вывод (рис.15).

Если $[AB] \parallel [CD]$, то $[A_3B_3] \parallel [C_3D_3]$.

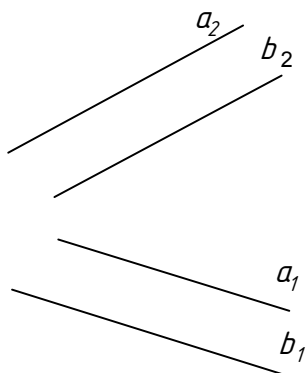


Рис.14

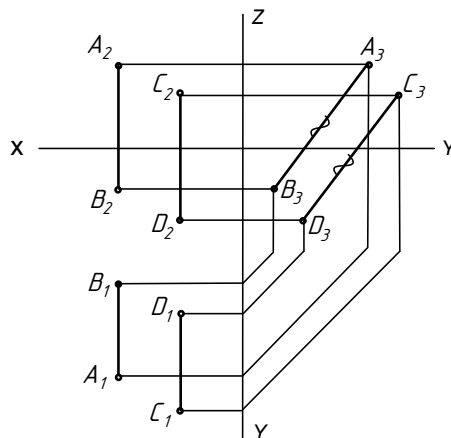


Рис.15.

При безосной системе нужно сделать следующие построения (рис.16.). Применяя косоугольное проецирование строим A_0B_0 и C_0D_0 .

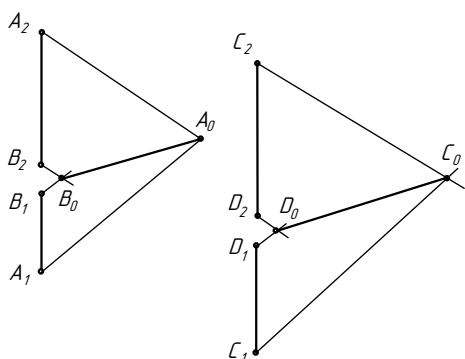


Рис. 16

$$\begin{aligned} &[A_1A_0] \parallel [B_1B_0] \parallel [D_1D_0] \parallel [C_1C_0] \text{ и} \\ &[A_2A_0] \parallel [B_2B_0] \parallel [D_2D_0] \parallel [C_2C_0]. \end{aligned}$$

$$\text{Если } [B_0A_0] \parallel [D_0C_0], \text{ то } |AB| \parallel |CD|$$

Пересекающиеся прямые.

Пересекающиеся прямые имеют общую точку. Эта общая точка должна быть как в пространстве, так и на эюре (рис.17).

Если прямые пересекаются, то точки пересечения их одноименных проекций должны находиться на одной линии связи. $a \cap b = K$; $a_1 \cap b_1 = K_1$; $a_2 \cap b_2 = K_2$.

Для заключения о пересечении прямых общего положения достаточно иметь их проекции на две плоскости проекций.

Если пересекаются профильные прямые, то необходимо построить их профильные проекции, а при безосной системе сделать дополнительные построения (рис.18).

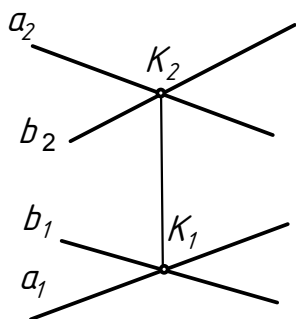


Рис.17

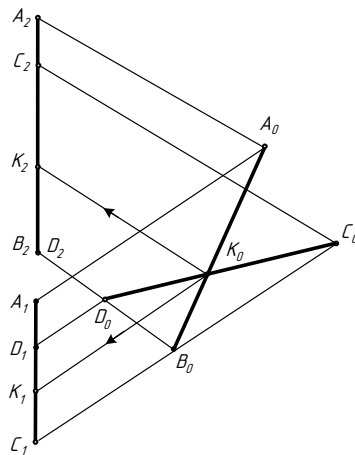


Рис.18.

$$\begin{aligned} &\text{Если } [A_0B_0] \cap [D_0C_0] = K_0, \text{ то } [AB] \cap [DC] = K. [A_1A_0] \parallel [C_1C_0] \parallel [B_1B_0] \parallel [K_1K_0] \text{ и} \\ &[A_2A_0] \parallel [C_2C_0] \parallel [B_2B_0] \parallel [K_2K_0]. \end{aligned}$$

Скрещивающиеся прямые.

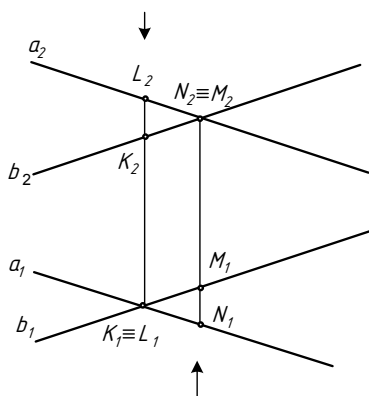


Рис.19

Если прямые не пересекаются и не параллельны между собой, то точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной линии проекционной связи (рис.19).

L и K – на одном перпендикуляре к π_1 .

M и N – на одном перпендикуляре к π_2 .

2.4. ПРОЕКЦИИ ПЛОСКИХ УГЛОВ

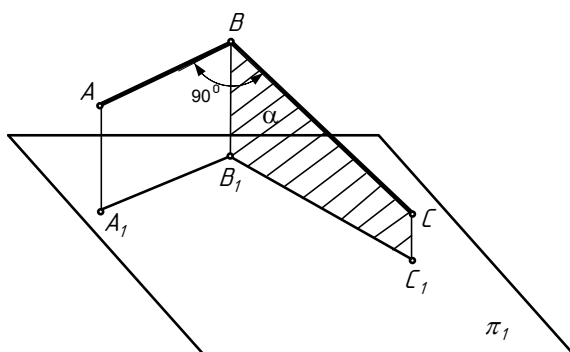


Рис.20.

Плоский угол проецируется на плоскость проекций в истинную величину тогда, когда обе его стороны параллельны плоскости проекций.

Если стороны прямого угла произвольно расположены по отношению к плоскостям проекций, то прямой угол может проецироваться и тупым и острым.

Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость прямой угол спроецируется в виде прямого же угла (рис.20).

Пусть стороны АВ прямого угла $ABC \parallel \pi_1$, требуется доказать, что проекция его угол $A_1B_1C_1=90^\circ$, $[AB] \perp \alpha$ ($[BB_1] \cap [BC]$), но $AB \parallel A_1B_1$ – поэтому $A_1B_1 \perp \alpha$, следовательно $A_1B_1 \perp B_1C_1$. Если $c \perp d$, а $c \parallel \pi_2$, то $c_2 \perp d_2$; d_1 – произвольное положение (одно из множества).

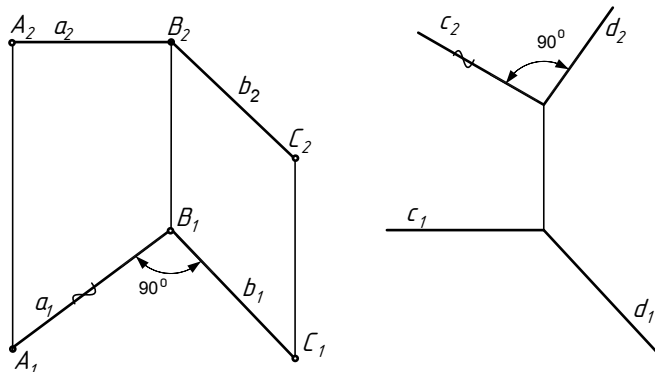


Рис.21

ЛЕКЦИЯ 3

3.1. ПЛОСКОСТЬ

Положение плоскости в пространстве можно определить:

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2. Прямой и точкой вне ее;
3. Двумя пересекающимися прямыми;
4. Двумя параллельными прямыми (рис.1).

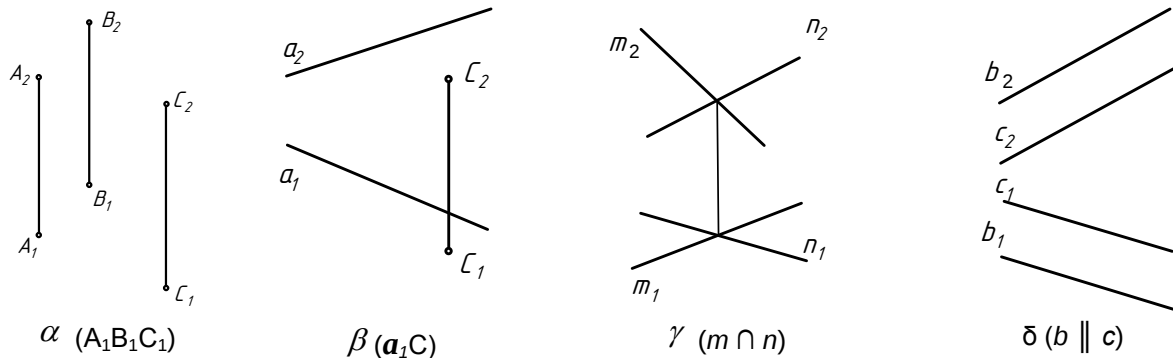


Рис. 1.

Плоскость может быть задана также отсеками плоской фигуры (рис.2).

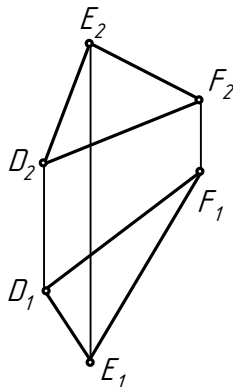


Рис. 2

Возможны следующие положения плоскости относительно плоскостей проекций:

1. Плоскость, не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения (рис.1 и 2).
2. Частные положения плоскости:
 - а) Плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций π_1 , называется горизонтально-проецирующей (рис.3). Горизонтальная проекция такой плоскости представляет собой прямую, являющуюся следом этой плоскости $\alpha_1 = \alpha \cap \pi_1$ угол ψ , который образуется между плоскостью α и π_2 , проецируется на плоскость π_1 без искажения.

Горизонтальные проекции всех точек и любых фигур, лежащих в горизонтально-проецирующей плоскости, совпадают со следом этой плоскости $\alpha_1 = \alpha \cap \pi_1$ (рис. 3).

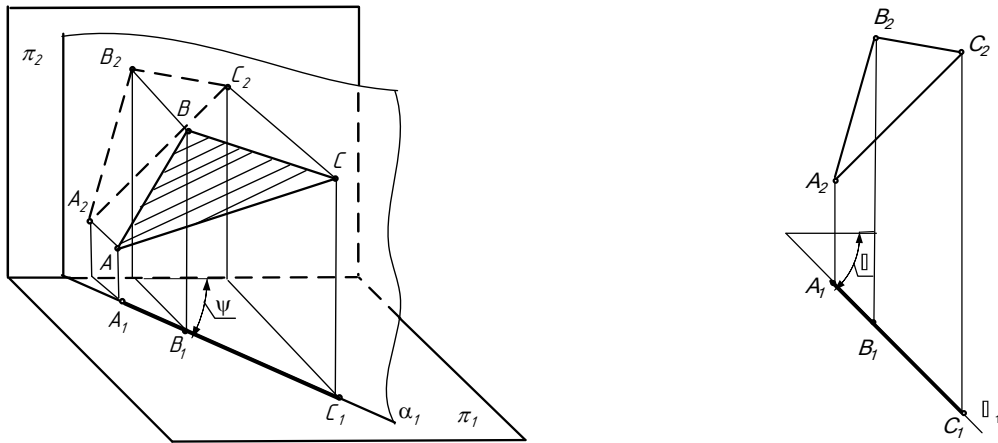


Рис. 3.

б) Плоскость, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций π_2 , называется фронтально-проецирующей плоскостью, изображается следом плоскости, полученной от пересечения заданной плоскости β (ABC) с фронтальной плоскостью проекций π_2 . $\beta_2 = \beta \cap \pi_2$.

Фронтальные проекции всех точек и фигур, лежащих в этой плоскости, совпадают с ее фронтальным следом. Угол φ между плоскостью β и π_1 проецируется без искажения, т.е. $\varphi_2 \equiv \varphi$ (рис. 4.).

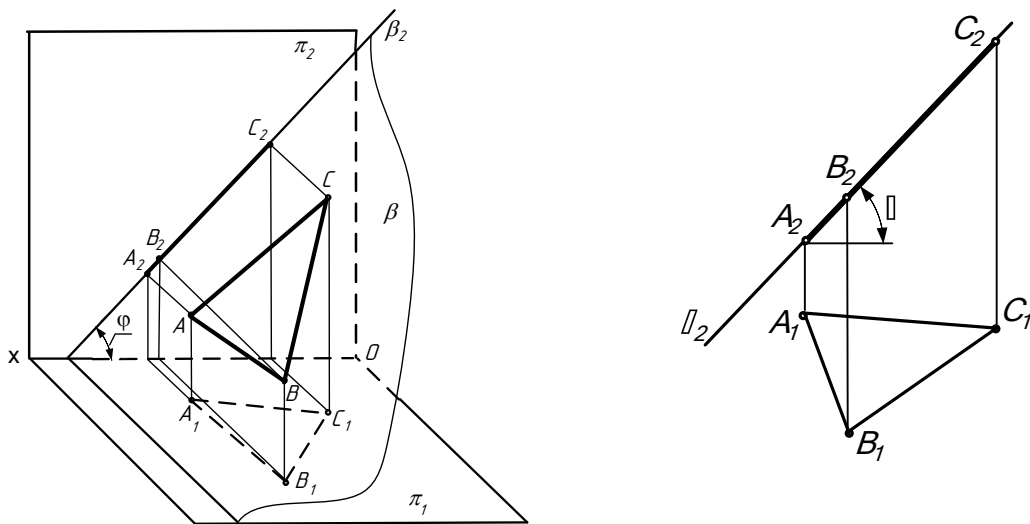


Рис. 4.

Плоскость, перпендикулярная к профильной плоскости проекций называется профильно-проецирующей плоскостью.

Частный случай, когда профильно-проецирующая плоскость проходит через ось OX и делит пополам угол между плоскостями π_2 и π_1 - плоскость симметрии (рис.5).

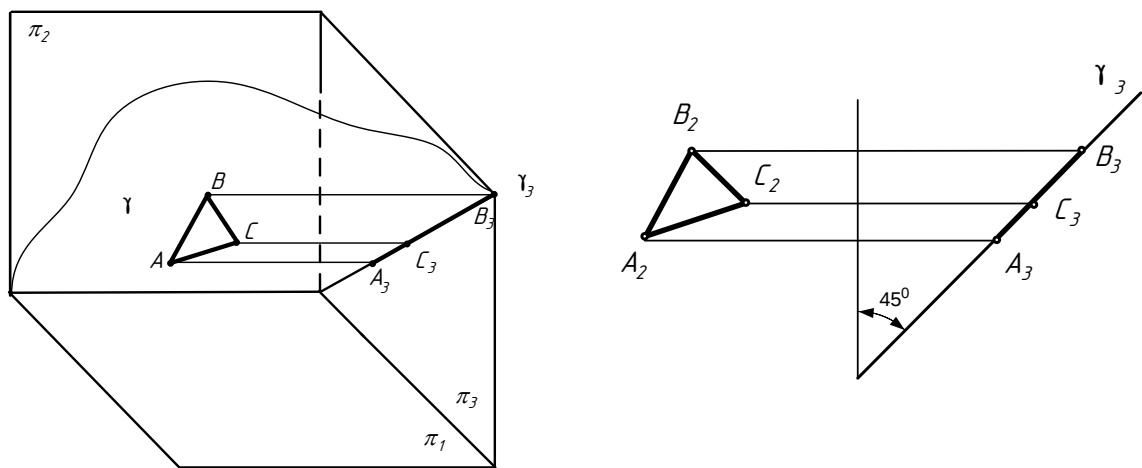


Рис.5

Основные свойства проецирующих плоскостей состоят в том, что все геометрические образы, лежащие в них, на одной из плоскостей проекций изображаются прямой, совпадающей со следом плоскости, т.е. с линией пересечения проецирующей плоскости с соответствующей плоскостью проекций.

Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций, называется плоскостями уровня. Плоскость $\delta \perp \pi_2$ и π_3 . Фронтальная и профильная проекция такой плоскости – горизонтальные прямые. Любая фигура, расположенная в плоскости δ_2 на горизонтальную плоскость проекций проецируется без искажения.

а) Плоскость δ , параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 , называется горизонтальной плоскостью (рис.6). Изображается следом плоскости, полученным от пересечения плоскости δ с плоскостью проекций π_2 : $\delta_2 = \delta \cap \pi_2$. $ABC \in \delta$; $A_2B_2C_2 \equiv \delta_2$; $A_1B_1C_1 = ABC$.

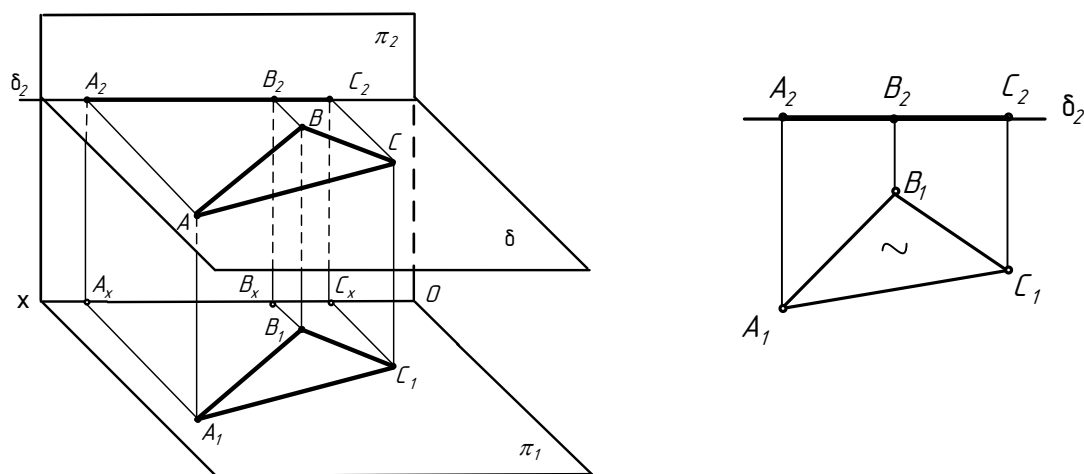


Рис.6.

б) Плоскость γ , параллельная плоскости π_2 , называется фронтальной (рис.7). $\gamma_1 = \gamma \cap \pi_1$. $ABC \in \gamma$; $A_1B_1C_1 \equiv \gamma_1$; $A_2B_2C_2 = ABC$.



3.2. ПРЯМАЯ И ТОЧКА В ПЛОСКОСТИ

-
- The diagram shows two sets of parallel lines. The first set consists of three lines labeled a_1 , b_1 , and c_1 . The second set consists of three lines labeled a_2 , b_2 , and c_2 . These lines intersect to form a grid of hexagons. The vertices of the hexagons are labeled with 1 and 2 . Specifically, the bottom-left vertex is labeled 1_1 , the bottom-right vertex is labeled 2_1 , the top-left vertex is labeled 1_2 , and the top-right vertex is labeled 2_2 . The lines are also labeled with I and 2 at their intersections.

Рис.8.

$$c \in \alpha(a \parallel b); [12] \in c \in \alpha(a \parallel b)$$

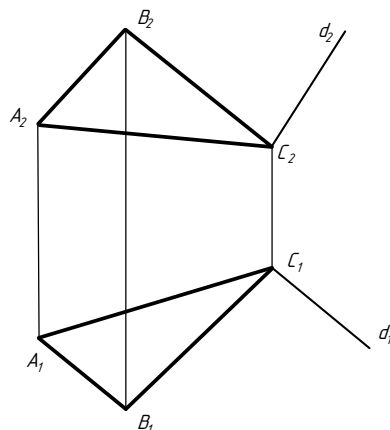


Рис.9

Построение точки в плоскости производится, исходя из условия, что она должна находиться на прямой, лежащей в этой плоскости. Т.о. задача на построение точки в плоскости сводится к задаче на построение прямой в этой плоскости (рис.10). Чтобы построить горизонтальную проекцию точки

Рис.10

3.3. ГЛАВНЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

Главными линиями плоскости называются прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные плоскостям проекций π_1 , π_2 или π_3 . Линии плоскости, параллельные π_1 называются горизонталями плоскости; линии плоскости, параллельные π_2 – фронталями плоскости; линии плоскости, параллельные π_3 – профильными прямыми (рис.11).

Линии наибольшего ската – прямые, проведенные по плоскости перпендикулярно к горизонталям (рис.12).

Линия наибольшего ската и ее горизонтальная проекция образуют линейный угол, которым измеряется двугранный угол, составленный плоскостью α ($f \cap h$) и плоскостью проекций π_1 .

С помощью главных линий плоскости оказывается удобным решать вопросы о взаимном расположении точки и плоскости (рис.13). Дана плоскость α ($f \cap h$) и точка А. Нужно определить принадлежит ли точка А плоскости. Для этого через точку А проводим горизонталь. Горизонтальная проекция точки А вне горизонтали, значит точка А не лежит в плоскости.

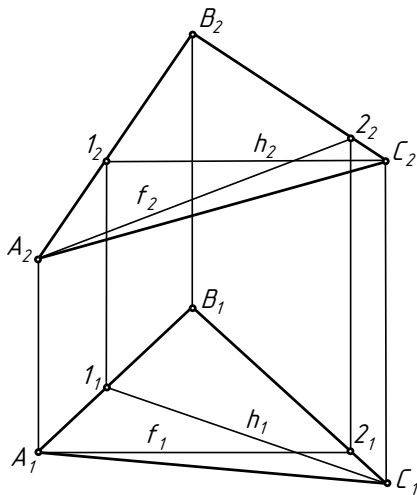


Рис.11

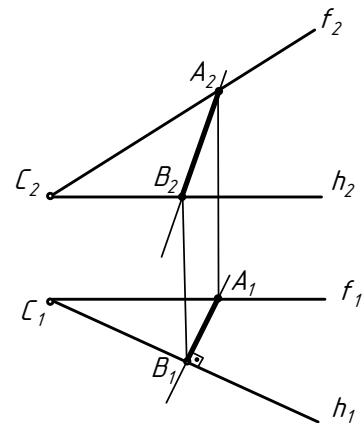
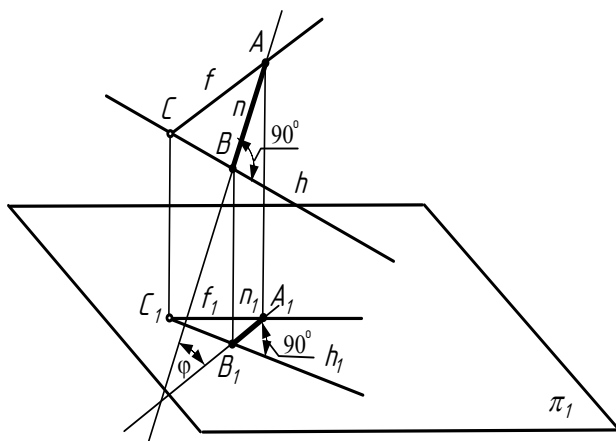
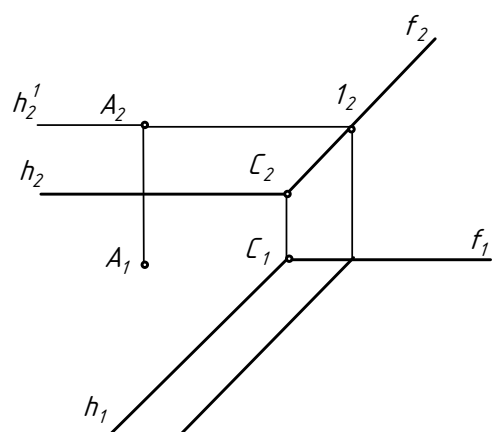


Рис.12а



3.4. ПРОЕКЦИРУЮЩАЯ ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ.

Прямая относительно плоскости вообще и проецирующей в частности может занимать следующие положения:

а) прямая лежит в проецирующей плоскости

Прямая, лежащая в проецирующей плоскости, имеет одну свою проекцию на соответствующем следе плоскости (рис.14). $[A_2B_2] \in \alpha_2$; $[A_2B_2] \equiv \alpha_2$.

Вторая проекция прямой располагается в зависимости от положения прямой в проецирующей плоскости.

б) прямая, параллельная проецирующей плоскости, имеет одну из своих проекций параллельной соответствующему следу этой плоскости (рис.15). $[A_1B_1] \parallel \beta_1$.

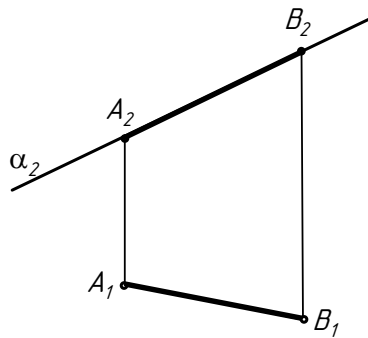


Рис.14

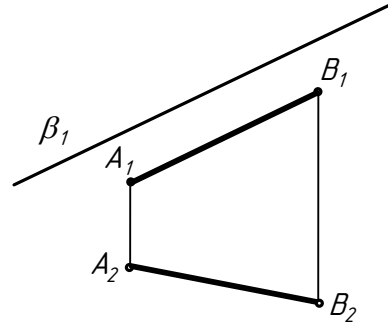


Рис.15

в) прямая, пересекающаяся с проецирующей плоскостью, имеет одну свою проекцию пересекающейся со следом плоскости и точка их пересечения есть проекция точки пересечения прямой с этой плоскостью (рис.16). $a \cap \alpha_1 = K$; $a_1 \cap \alpha_1 = K_1$.

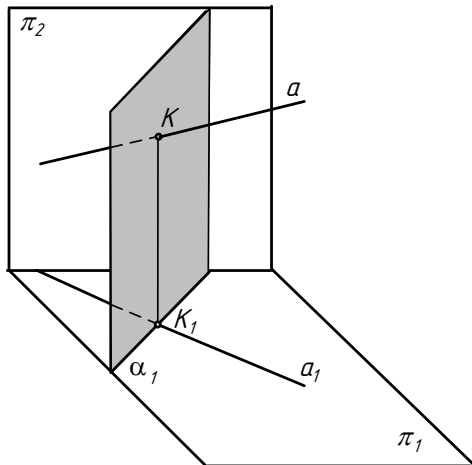


Рис.16

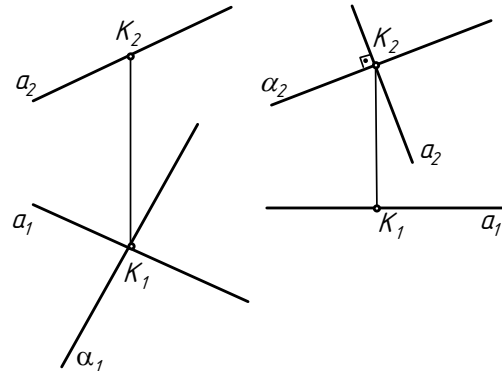


Рис.17

Точка К есть точка пересечения прямой с плоскостью. Как точка прямой ее проекция должна располагаться на одноименных проекциях прямой, как точка проецирующей плоскости, она должна иметь одну проекцию на следе плоскости.

Прямая, пересекающаяся с проецирующей плоскостью и перпендикулярная к ней, всегда параллельна той плоскости, к которой проецирующая плоскость перпендикулярна.

ЛЕКЦИЯ 4

4.1. ДВЕ ПЛОСКОСТИ.

Две плоскости могут быть параллельны друг к другу или пересекаться между собой.

Параллельные плоскости.

Две плоскости параллельны, если в каждой из них можно построить по две пересекающихся между собой прямые линии так, чтобы прямые одной плоскости были соответственно параллельны прямым другой плоскости.

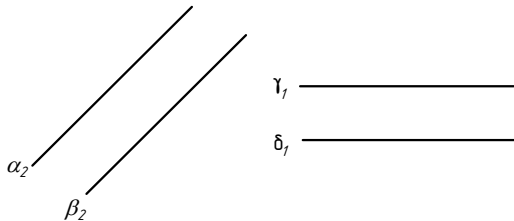
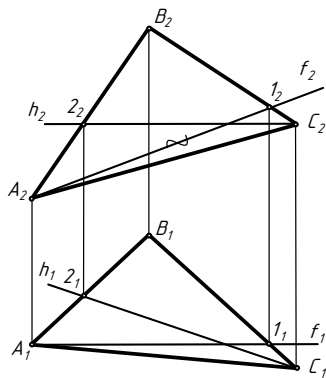


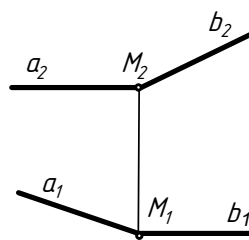
Рис.1

Наиболее простой случай – параллельность двух проецирующих плоскостей. Здесь достаточно параллельности следов плоскостей (рис.1).

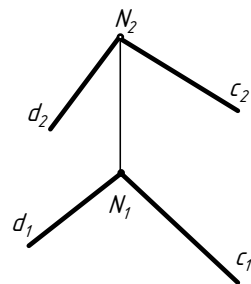
В случае параллельности плоскостей общего положения необходимо в каждой из них указать по две соответственно параллельные прямые (рис.2). В качестве таких прямых можно взять главные линии плоскости или какие-то другие прямые. $\alpha (ABC) \parallel \beta (a \cap b) \parallel \gamma (d \cap c)$.



$\alpha (ABC)$



$a \parallel h; a_1 \parallel h_1; a_2 \parallel h_2$
 $b \parallel f; b_1 \parallel f_1; b_2 \parallel f_2$
 $\beta (a \cap b)$



$d \parallel [AB]; d_1 \parallel [A_1B_1]; d_2 \parallel [A_2B_2]$
 $c \parallel [BC]; c_1 \parallel [B_1C_1]; c_2 \parallel [B_2C_2]$
 $\gamma (d \cap c)$

Рис.2

Пересекающиеся плоскости.

Основная задача – построение линии пересечения двух плоскостей, которая вполне определяется двумя точками, принадлежащими обеим плоскостям:

а) проецирующие

Проецирующие плоскости одного наименования, как перпендикулярные к одной и той же плоскости проекций, пересекаются по прямой линии также перпендикулярной к этой плоскости проекций (рис.3). Проецирующие плоскости разных наименований пересекаются по прямой, для которой они будут проецирующими плоскостями (рис.4).

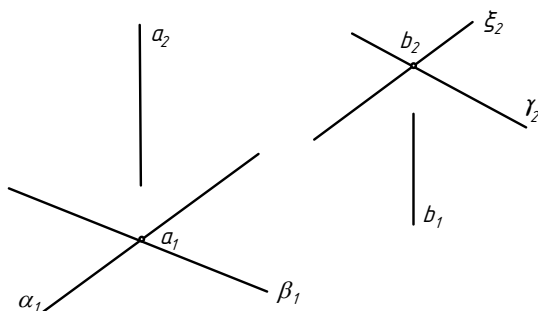


Рис.3

$\alpha_1 \cap \beta_1 = a \perp \pi_1; \epsilon_2 \cap \xi_2 = b \perp \pi_2$

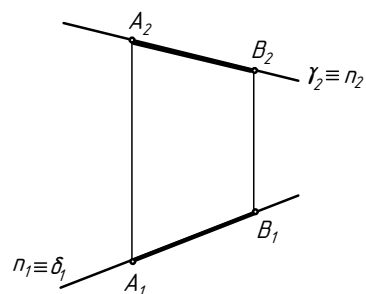


Рис.4.

$\gamma_2 \cap \delta_1 = n; n_1 \equiv \delta_1; n_2 \equiv \gamma_2$

б) Наиболее просто решается задача, если одна из пересекающихся плоскостей проецирующая (рис.5). $\beta(ABC) \cap \alpha_1 = m$; $m_1 \equiv \alpha_1$. m – линия пересечения, так как линия пересечения принадлежит и плоскости α_1 , то m лежит на следе плоскости.

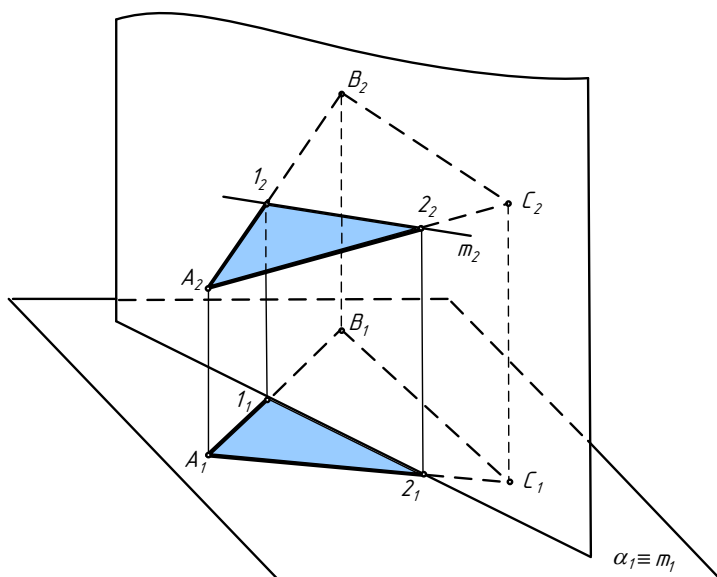
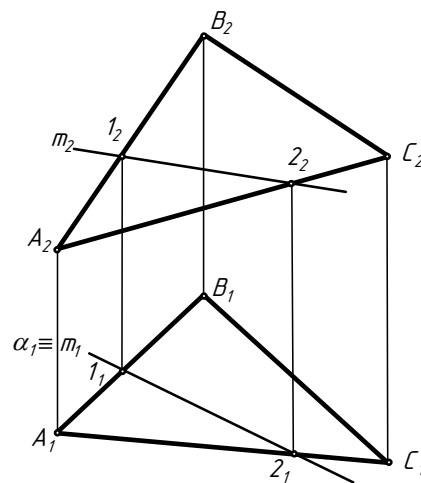


Рис. 5



в) Две плоскости общего положения.

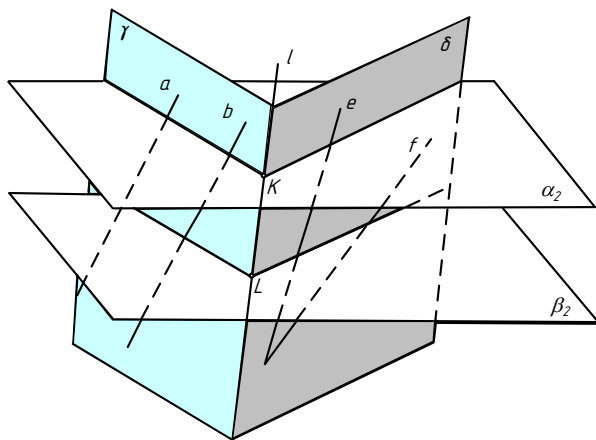


Рис.6

Рассмотрим случай пересечения плоскостей общего положения (рис.6).

Три плоскости пересекаются в одной точке, поэтому общий метод построения точек линии пересечения состоит в следующем: две пересекающиеся плоскости пересекаются третьей, вспомогательной плоскостью.

$\gamma \cap \alpha_2 = m$; $\delta \cap \alpha_2 = n$; $m \cap n = K$; $K \in \alpha_2$

$\gamma \cap \beta_2 = m'$; $\delta \cap \beta_2 = n'$; $m' \cap n' = L$; $L \in \beta_2$.

Через точки K и L проводим линию пересечения l (рис.7).

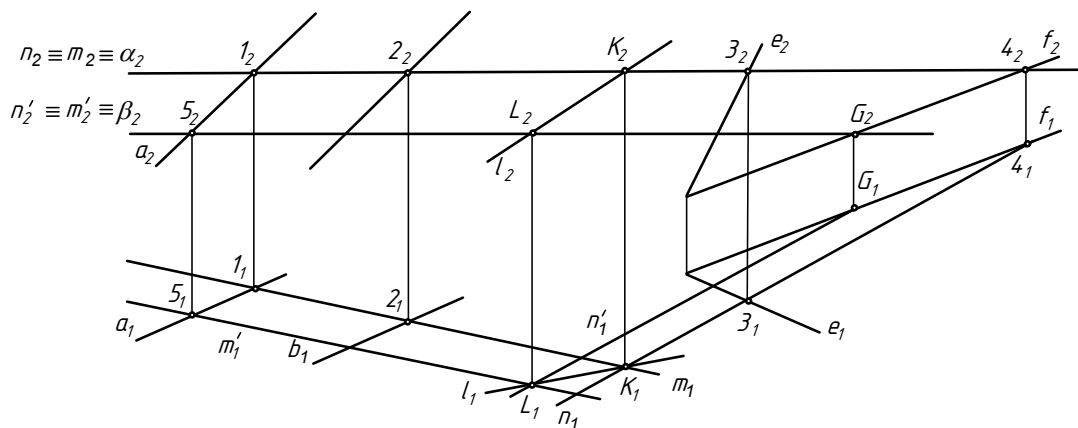


Рис.7

Некоторого упрощения можно достичь, если вспомогательные плоскости проводить через прямые, задающие плоскости (рис.8). $\alpha(ABC) \cap \beta(DEF) = [LK]$.

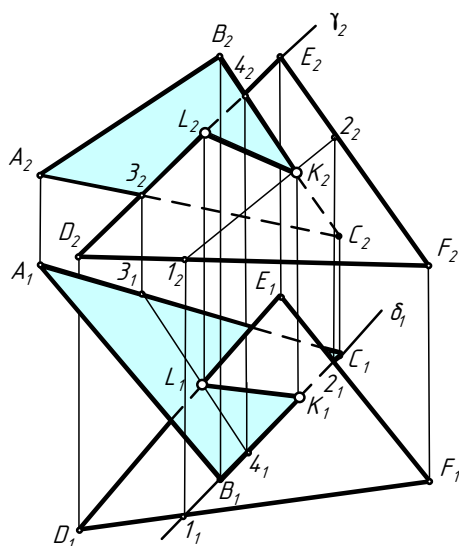


Рис.8

4.2. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Возможно следующее взаимное расположение прямой и плоскости:

1. Прямая лежит в плоскости (см. лекции 2).
2. Прямая параллельна плоскости.
3. Прямая пересекает плоскость.
4. Прямая перпендикулярна плоскости.

Прямая параллельная плоскости.

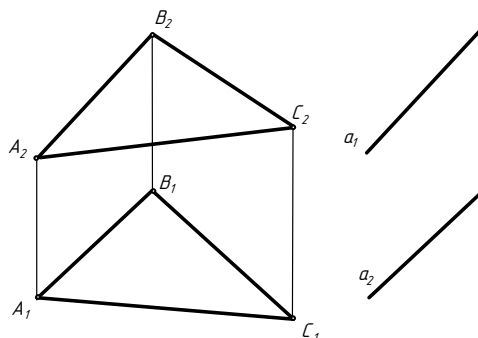


Рис.9

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (рис.9). $a \parallel [AB]$, $a_1 \parallel [A_1B_1]$, $a_2 \parallel [A_2B_2]$, задача не имеет единственного решения.

Пересечение прямой с плоскостью.

Для определения точки пересечения прямой a с плоскостью общего положения α (ABC) необходимо выполнить следующие построения (рис.10):

1. Через данную прямую a провести вспомогательную проецирующую плоскость γ_1 , так как $a \in \gamma_1$, то $a_1 \equiv \gamma_1$.
2. Построить линию пересечения n данной плоскости α (ABC) и вспомогательной плоскости γ_1 . α (ABC) $\cap \gamma_1 = n$; $[12] \in n$; $[1_1 2_1] \in n_1$; $[1_2 2_2] \in n_2$.
3. Определить точку пересечения K прямой a и заданной плоскости $K = a \cap n$; $K_1 = a_1 \cap n_1$; $K_2 \in a_2$; $K_2 = a_2 \cap n_2$; $K_1 \in a_1$.
4. Определяем видимость прямой. Для этого рассматриваем конкурирующие точки 1-3 и 4-5.
5. Точка $1 \in [AB] \in \alpha$ (ABC); точка $3 \in a$. На горизонтальной плоскости проекций проекции точек 1_1 и 3_1 совпадают, а на фронтальной плоскости проекций отрезок $1_2 3_2$ в горизонтальном проецирующем положении. Проекция точки $1_2 \in [AB] \in \alpha$ (ABC) находится выше проекции $3_2 \in a$. Таким образом на горизонтальной плоскости проекций отрезок прямой до точки K будет закрыт плоскостью.

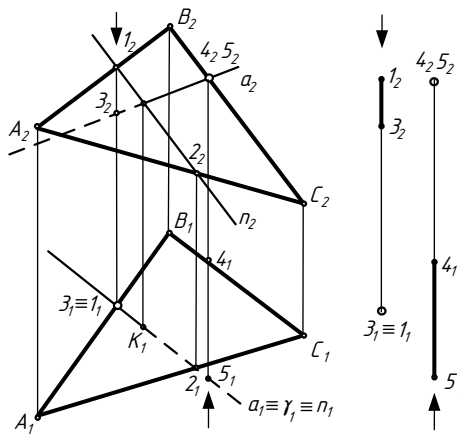


Рис.11

Рассмотрим конкурирующие точки 4-5; $4 \in [BC] \in \alpha$ (ABC); $5 \in a$. Отрезок $[4_1 5_1]$ находится во фронтально-проецирующем положении – на фронтальной плоскости проекций превращается в точку. Таким образом, прямая на фронтальной плоскости проекции будет видна до K_2 , а дальше уходит за плоскость.

Прямая, перпендикулярная плоскости.

Построение перпендикуляра к плоскости основано на положении геометрии: прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна ко всем прямым, лежащим в этой плоскости и проходящим через точку пересечения перпендикуляра с этой плоскостью (рис.11).

Пусть некоторый отрезок прямой $[AC] \perp$ плоскости γ и точка A – точка пересечения отрезка прямой с этой плоскостью.

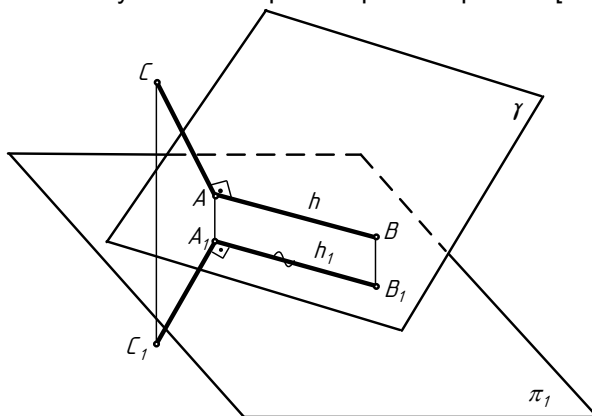


Рис.11

Построим на плоскости γ горизонтали h и на $\pi_1 - h_1$, так как $[CA] \perp [AB]$, $[C_1 A_1] \perp [A_1 B_1]$ прямой угол спроецируется на плоскость π_1 без искажения, $A_1 B_1 C_1 = ABC$.

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости.

Расстояние от точки до плоскости измеряется отрезком перпендикуляра от точки до его основания на плоскости:

1. Из точки опустить перпендикуляр на плоскость
2. Найти точку встречи перпендикуляра с плоскостью

Пример 1. Определить расстояние от точки М до плоскости α (ABC) (рис.12).

1. В плоскости α (ABC) строим горизонталь и фронталь. Из точки М опускаем перпендикуляр $n \perp \alpha$ (ABC); $n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$.

2. Находим точку пересечения перпендикуляра n с плоскостью α (ABC). $n \in \beta_2$; $n_2 \equiv \beta_2$; $\beta_2 \cap \alpha$ (ABC) = m ; $m_2 \equiv \beta_2$; $[34] \in m$; $n_1 \cap m_1 = K_1$; $K_2 \in n_2$.

3. Определяем истинную величину расстояния от точки М до плоскости α (ABC).

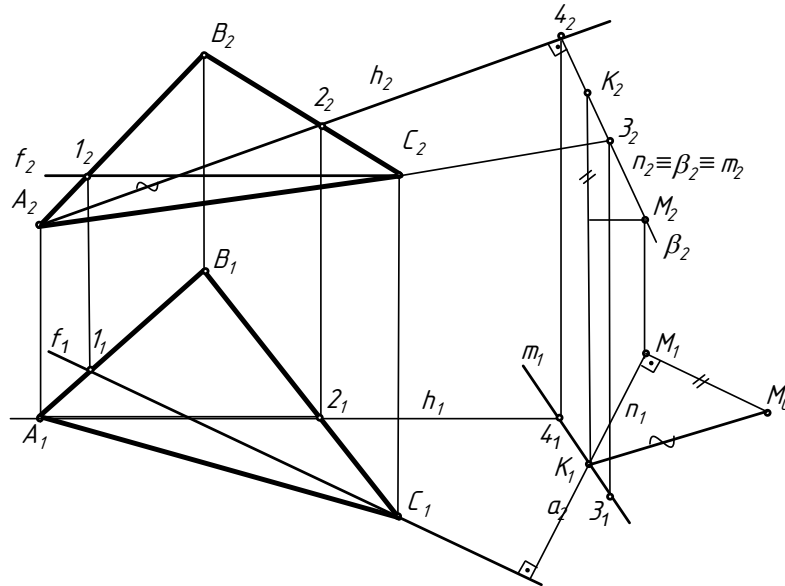
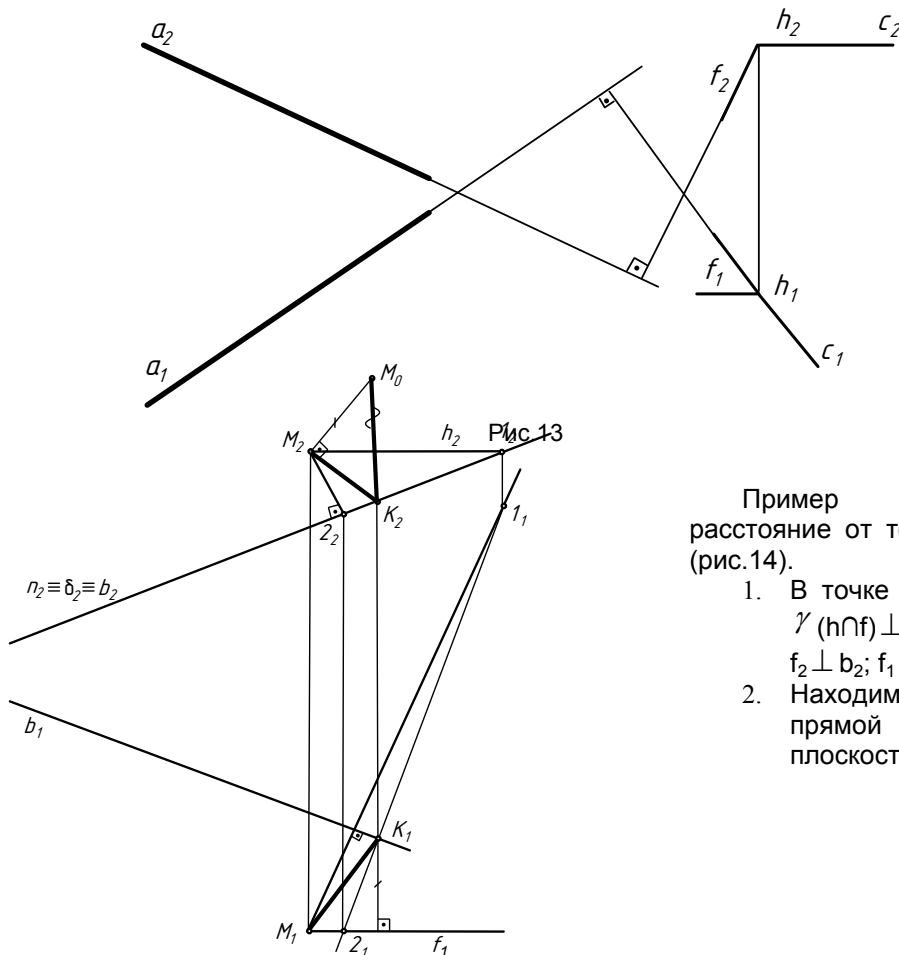


Рис.12

Пример 2. Построить плоскость перпендикулярную данной прямой (рис.13). Так как прямая $a \perp \alpha$ ($h \cap f$); $a_1 \perp h_1$; $h_2 \parallel OX$; $a_2 \perp f_2$; $f_1 \parallel OX$.



Пример 3. Определить расстояние от точки М до прямой b (рис.14).

1. В точке М задаем плоскость γ ($h \cap f$) $\perp b$; $h_1 \perp b_1$; $h_2 \parallel OX$; $f_2 \perp b_2$; $f_1 \parallel OX$.

2. Находим точку пересечения прямой b с заданной плоскостью

Рис. 14

$b \in \delta_2; b_2 \equiv \delta_2; \delta_2 \cap \alpha (h \cap f) = n; n_2 \equiv \delta_2; [12] \in n; n_1 \cap b_1 = K_1; K_2 = b_2.$

Истинную величину расстояния определяем способом треугольника.

4.3. ПЛОСКОСТИ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ

Для построения плоскости перпендикулярной к данной, необходимо построить перпендикуляр к ней, затем уже строить плоскость, проходящую через данный перпендикуляр. Так как через прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей, то задание имеет множество решений.

Пример. В точке D построить плоскость α , перпендикулярную плоскости β (ABC) (рис.15). $n \perp \alpha$ (ABC); $n_1 \perp h_1$; $n_2 \perp f_2$.

Плоскость α задаем двумя пересекающимися прямыми $n \cap m$; $n \perp \alpha$, а m одна из множества прямых, проецирующих через точку D.

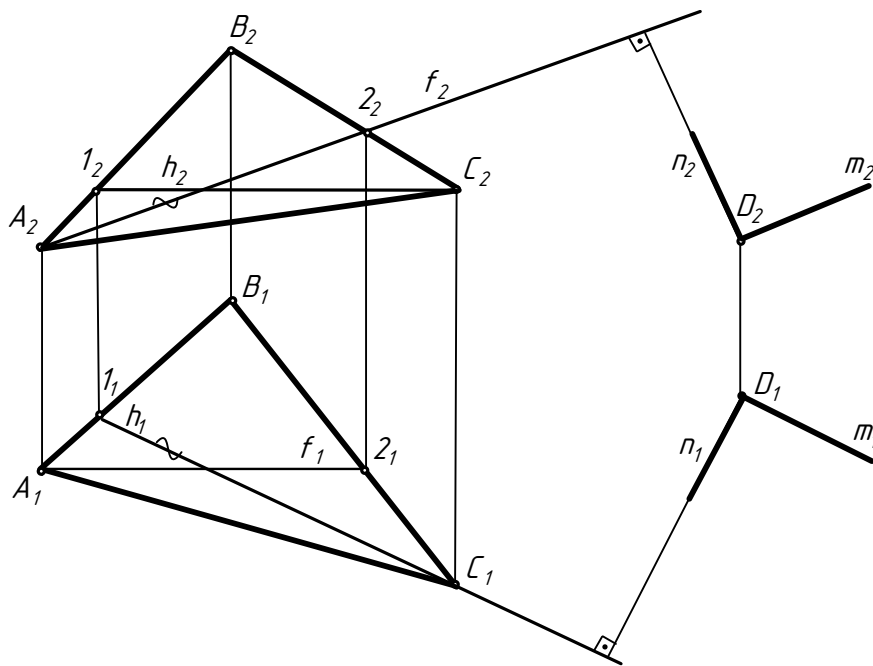


Рис.15

Лекция 5. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА.

Многие пространственные задачи в общем виде решаются довольно сложно, однако будучи поставлены в частное положение, решаются легко. Примером может служить одна из основных задач курса: определение расстояния от точки до прямой.

Сущность методов преобразования чертежа состоит в том, что задача общего положения переводится в частное, где она решается значительно легче.

Будем рассматривать следующие методы преобразования чертежа:

1. Метод перемены плоскостей проекций
2. Метод вращения

5.1. МЕТОД ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

В методе перемены плоскостей проекций геометрические элементы остаются неподвижными, а заменяются плоскости проекций так, чтобы в новом их положении задача решалась легче. Такая замена будет возможна, если каждая новая система будет состоять из двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, т.е. если не будет нарушен основной принцип ортогонального проецирования.

Наиболее широкое применение имеет такой выбор системы плоскостей проекций, при котором одна из плоскостей проекций в обеих системах является общей, т.е. заменяется только одна, а вторая остается в старой системе. При замене одной плоскости проекций геометрический элемент в новой системе не меняет своего положения по отношению к той плоскости проекций, которая сохранилась от старой системы, т.е. расстояние элемента от этой плоскости не изменилось. Это позволяет построить недостающую проекцию его в новой системе.

Дана точка A и ее ортогональные проекции A_1 и A_2 в системе плоскостей проекций $\pi_1 - \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = X_{12}$. Заменяем плоскость $\pi_2 \rightarrow \pi_4$. Исходя из основного принципа ортогонального проецирования (рис.1) в качестве новой плоскости можно взять любую плоскость $\perp \pi_1$. Пересечение плоскостей π_1 и π_4 даст новую ось проекций X_{14} .

Будем рассматривать точку A в этой новой системе плоскостей проекций и построим ее проекции. Горизонтальная проекция останется прежней; фронтальная проекция строится обычным путем, причем $A_2 A_x = A_4 A_x$. Совместим плоскости проекций и перейдем к эпюру.

Факт замены плоскостей проекций отразится на эпюре в виде новых осей проекций X_{14} и в виде нового направления проецирования $\perp X_{14}$. Горизонтальная проекция точки останется прежней (рис.2).

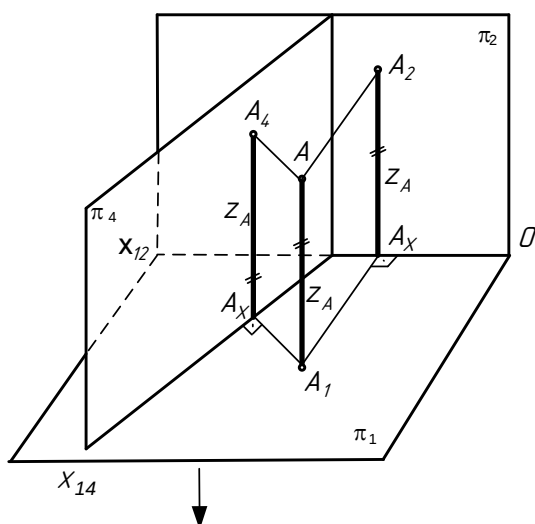


Рис.1

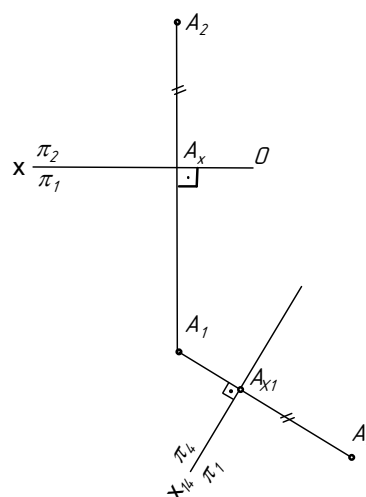


Рис.2.

Для построения новой фронтальной проекции проводим новое направление проецирования, перпендикулярное новой оси, и на нем откладываем $A_4 A_{x1} = A_2 A_x = Z_A$, которое и определит новую фронтальную проекцию A_4 .

При замене горизонтальной проекции π_1 на π_5 расстояние от плоскости π_2 в старой и новой системах остается одинаковым и фронтальная проекция B_2 остается прежней. Новая

При решении некоторых задач приходится выполнять ряд последовательных перемен плоскостей проекций, т.е. переходить от системы $\pi_1 - \pi_2$ к системе $\pi_5 - \pi_2$, далее $\pi_5 - \pi_4$ и т.д.

Для того, чтобы отрезок спроецировался на плоскость проекций в истинную величину, его нужно поставить в положение, параллельное этой плоскости, при этом одна из его проекций в новой системе будет параллельна оси проекций.

$$\pi_2 \rightarrow \pi_4, \pi_4 \parallel [\text{AB}], \text{X}_{14} \parallel [\text{A}_1\text{B}_1]$$

Для того, чтобы отрезок прямой общего положения перевести в положение, перпендикулярное к плоскости проекций, нужны последовательные перемены плоскостей проекций: первой переменной ставим отрезок в положение, параллельное плоскости проекций, второй – в положение перпендикулярное.

В нашем случае ставим отрезок сначала в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекции π_1 , а затем перпендикулярное фронтальной плоскости проекций. Новую горизонтальную плоскость проекции π_5 берем параллельно отрезку АВ, т.е. новое направление проецирования будет перпендикулярно A_2B_2 . Затем заменяем фронтальную проекцию на π_4 , новое направление проецирования берем по направлению проекции A_5B_5 .

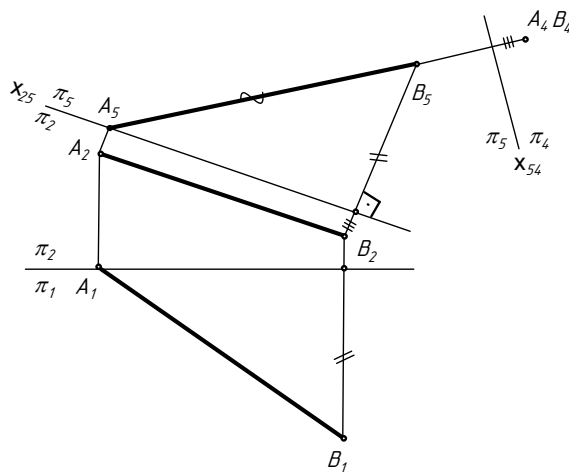


Рис.5

1. $\pi_1 \rightarrow \pi_5, \pi_5 \parallel [AB], X_{25} \parallel [A_2B_2];$
2. $\pi_2 \rightarrow \pi_4, \pi_4 \perp [AB], X_{54} \perp [A_5B_5]$

Задача 3. Заменить плоскости проекций так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей.

Расположив $\pi_4 \perp h_1$, обеспечим сразу выполнение двух условий: $\pi_4 \perp \pi_1$ и плоскости треугольника ABC (рис.6).

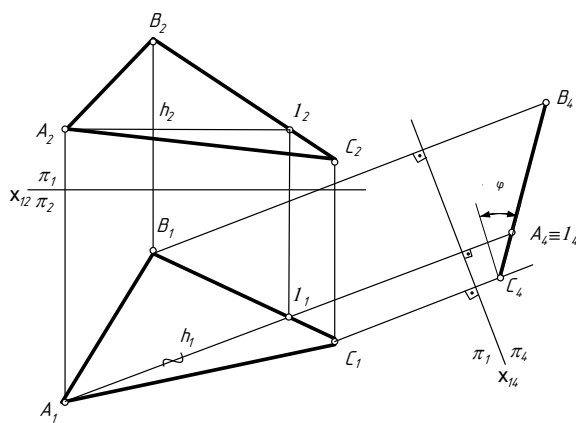
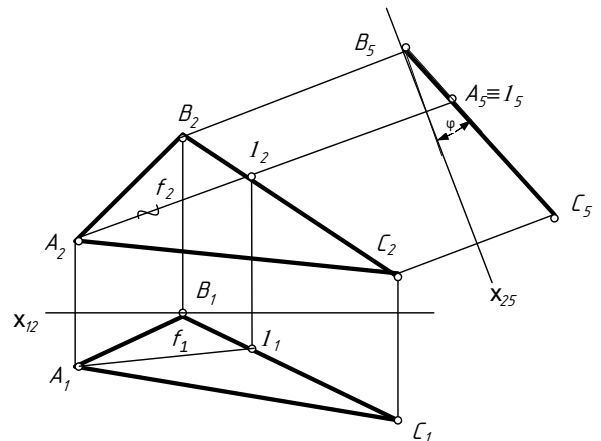


Рис.6

$\pi_2 \rightarrow \pi_4, \pi_4 \perp \alpha [ABC], X_{14} \perp h_1.$



$\pi_1 \rightarrow \pi_5, \pi_5 \perp \alpha [ABC], X_{25} \perp f_2.$

Задача 4. Определить истинную величину треугольника ABC, т.е. заменить плоскости проекций так, чтобы плоскость общего положения стала параллельной одной из плоскостей проекций новой системы.

а) ΔABC лежит в проецирующей плоскости (рис.7);

Заменяем π_1 на π_5 так, чтобы новая плоскость проекций π_5 параллельна фронтальной проецирующей плоскости $A_2B_2C_2$, тогда ΔABC спроецируется на π_5 в истинную величину $\pi_1 \rightarrow \pi_5, \pi_5 \parallel \alpha [ABC], X_{25} \parallel [A_2B_2C_2].$

б) ΔABC лежит в плоскости общего положения (рис.8):

1. $\pi_2 \rightarrow \pi_4; \pi_4 \perp \alpha [ABC]; X_{14} \perp h_1$

2. $\pi_1 \rightarrow \pi_5; \pi_5 \parallel \alpha [ABC]; X_{45} \parallel A_4B_4C_4.$ Следует обратить внимание на то, что координаты точек измеряются и откладываются от соответствующей оси X.

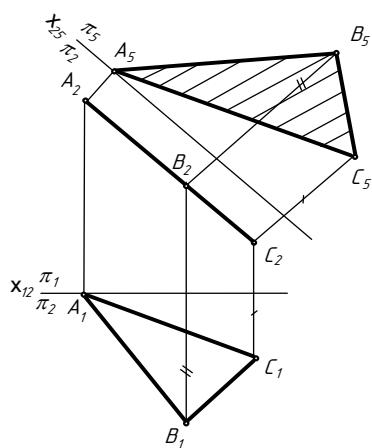


Рис.7.

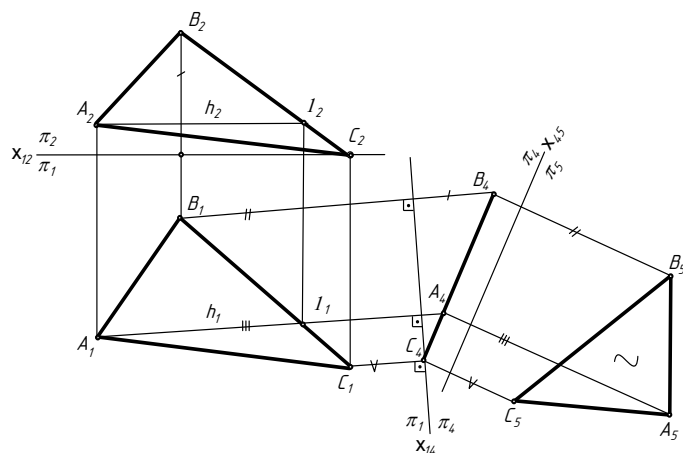


Рис.8

Задача 5

Определить расстояние от точки до прямой (рис.9).

1. $\pi_2 \rightarrow \pi_4, \pi_4 \parallel [AB], X_{14} \parallel [A_1B_1];$
2. $\pi_1 \rightarrow \pi_5; \pi_5 \perp [AB]; X_{45} \perp [A_4B_4].$

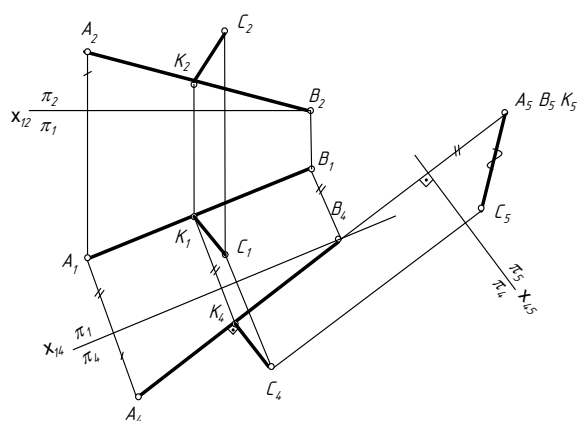


Рис.9

Задача 6.

Определить расстояние между двумя параллельными прямыми m и n (рис.10). Задача сводится к определению расстояния от точки до прямой. Для этого выбирают на прямой m отрезок [AB], а на прямой n точку L.

1. $\pi_2 \rightarrow \pi_4, \pi_4 \parallel [AB], X_{14} \parallel [A_1B_1];$
2. $\pi_1 \rightarrow \pi_5; \pi_5 \perp [AB]; X_{45} \perp [A_4B_4];$

K_5L_5 -истинное расстояние между прямыми m и n

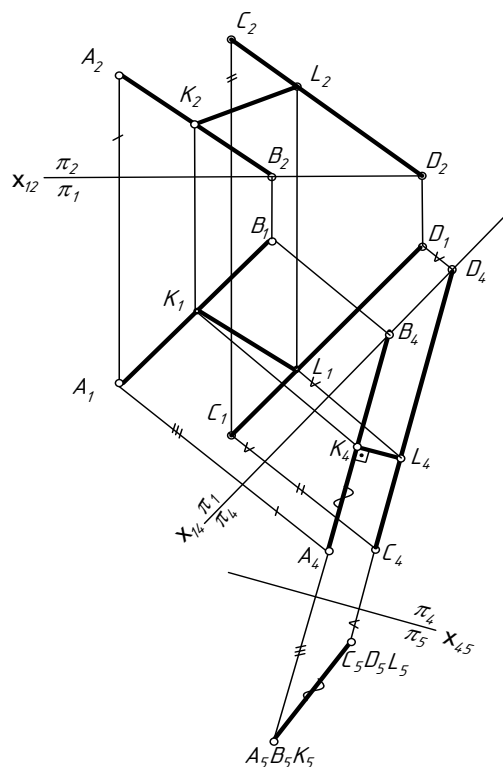


Рис.10

Задача 7. Определим расстояние между скрещивающимися прямыми $[AB] \parallel \pi_2$ и $[CD]$ (рис.11). Для решения этой задачи заменяем плоскости проекций так, чтобы отрезок $[AB]$ стал горизонтально-проецирующим, $\pi_1 \rightarrow \pi_5$; $\pi_5 \perp [AB]$; $X_{25} \perp [A_2B_2]$. На π_5 отрезок $[AB]$ проецируется в точку, а на π_2 в истинную величину.

Рассмотрим дополнительно рис.12а. Выбираем точку K на отрезке $[CD]$ и опускаем перпендикуляр на истинный отрезок $[AB]$, получаем точку L . Так как $[A_2B_2] \perp \pi_5$, то $[LK] \parallel \pi_1$, на π_5 изобразится в истинную величину. На рис.12б изображен эпюр этого решения.

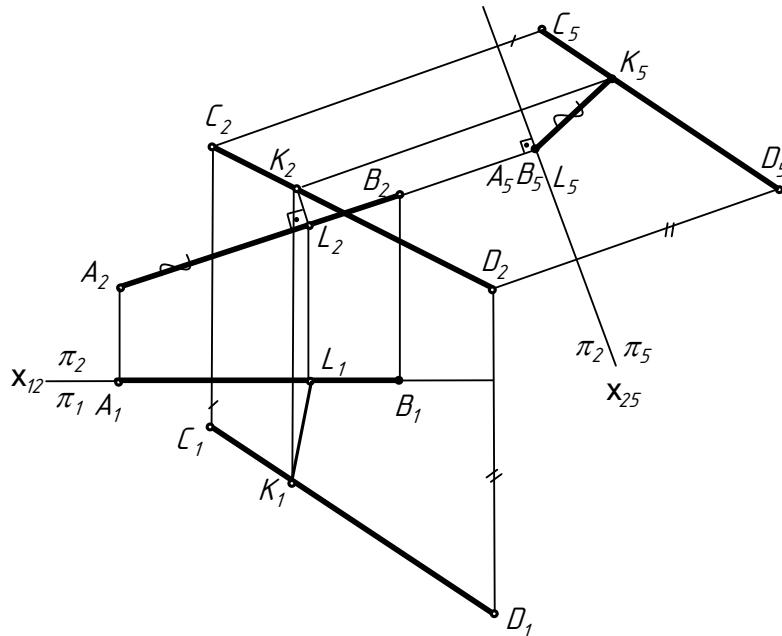


Рис.11

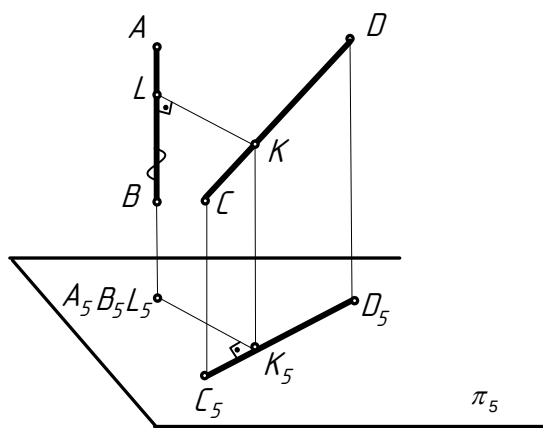


Рис. 12а

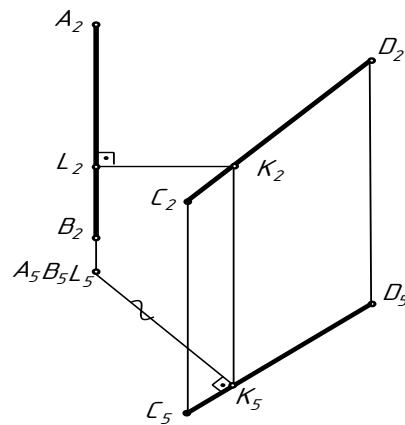


Рис. 12б

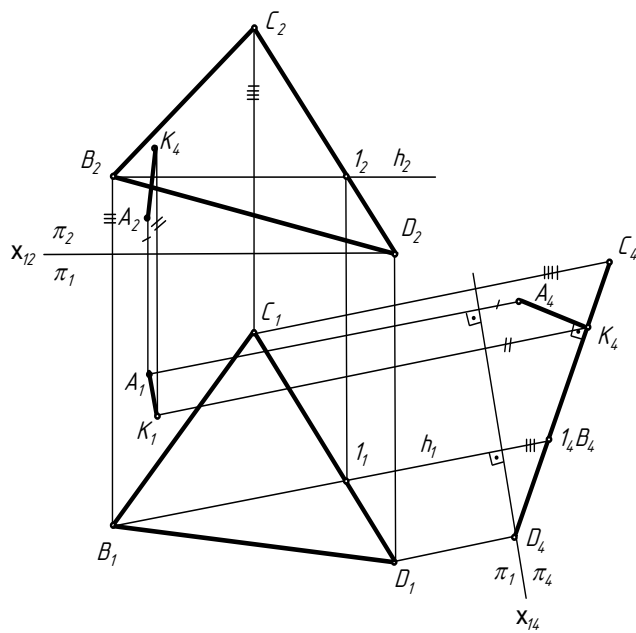


Рис.13

Задача 8. Определить расстояние от точки A до плоскости α (BCD) (рис.13). Расстояние определяется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

$\pi_2 \rightarrow \pi_4$, $\pi_4 \perp \alpha$ (BCD); $X_{14} \perp h_1$. Перпендикуляр, опущенный из A_4 на проецирующую плоскость $C_4B_4D_4$ является истинной величиной расстояния от точки A до плоскости.

ЛЕКЦИЯ 6 МЕТОД ВРАЩЕНИЯ

Сущность метода вращения состоит в том, что при фиксированном положении плоскостей проекций будем вращать геометрические элементы задачи до такого положения, в котором задача могла бы быть решена легко.

При вращении вокруг неподвижной оси каждая точка вращаемой фигуры перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, точка перемещается по окружности, центр которой лежит на оси вращения, а радиус равен расстоянию от точки до оси.

Все точки фигуры должны поворачиваться вокруг одной оси в одну и ту же сторону, на один и тот же угол. Точки, находящиеся на оси вращения, остаются неподвижными. Наиболее просто задача решается, если ось вращения перпендикулярна или параллельна плоскости проекций.

6.1. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ОСЕЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Вращение точки. Будем поворачивать точку A вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_1 (рис.1). Ось вращения - i . Рассмотрим траектории, описываемые проекциями точки при ее вращении. На плоскости π_1 горизонтальная проекция точки A - A_1 будет двигаться по дуге окружности радиуса, равного расстоянию от оси O_1 до A_1 . На плоскости π_2 фронтальная проекция точки A_2 будет перемещаться по прямой, параллельной оси проекций, так как окружность лежит в плоскости $\parallel \pi_1$ и $\perp \pi_2$.

Если ось вращения перпендикулярна π_2 (рис.2), то фронтальная проекция точки будет двигаться по дуге окружности, а горизонтальная по прямой, параллельной оси проекций. Эпюры вращения точки A показаны на рис. 3.

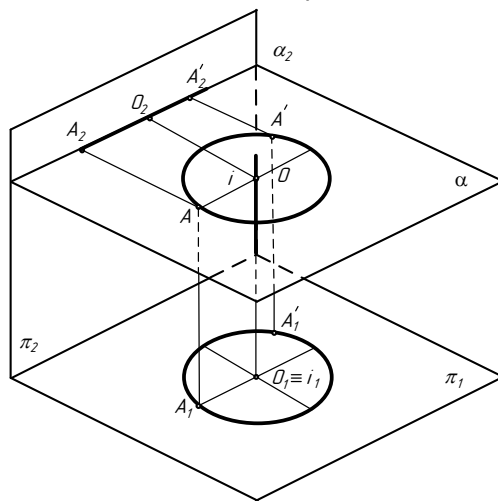


Рис.1

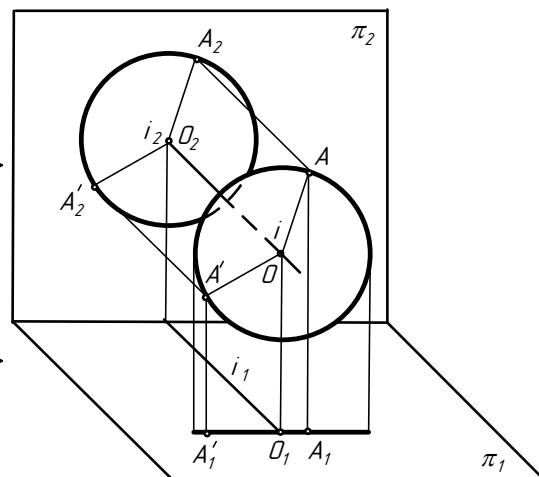
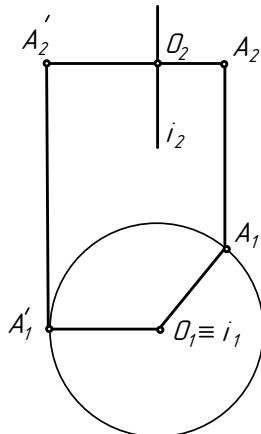


Рис.2.

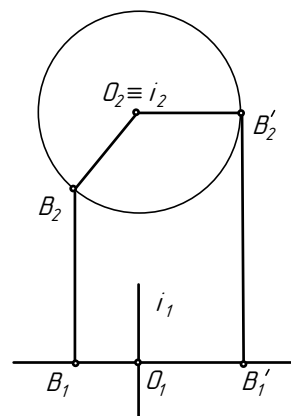


Рис.3.

Вращение отрезка. Пусть задан отрезок $[AB]$ и ось вращения i , перпендикулярная плоскости π_1 .

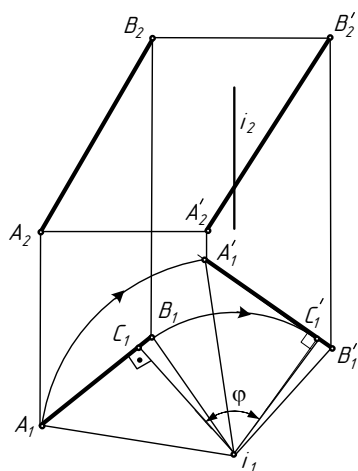


Рис.4

Для того, чтобы построить проекции отрезка, повернутого вокруг оси i на угол φ , достаточно определить новое положение двух его точек, например А и В. При построении горизонтальных проекций было выполнено условие $\angle A_1 i_1 A'_1 = \angle B_1 i_1 B'_1$. Фронтальные проекции точек А и В перемещаются по горизонтальным прямым, перпендикулярным линиям проекционной связи. Они определены пересечением этих прямых с линиями связи, проведенными через точки A'_1 и B'_1 . Заметим, что $\triangle A_1 i_1 B_1 = \triangle A'_1 i_1 B'_1$ (по двум сторонам и заключенному между ними углу), поэтому конгруэнтны и высоты треугольников, т.е. $i_1 C_1 = i'_1 C'_1$. Используя это равенство, тот же поворот отрезка АВ можно осуществить

следующим образом:

1. Из точки i_1 опустить перпендикуляр $i_1 C_1$ на $A_1 B_1$;
2. Этот перпендикуляр повернуть на угол φ в заданном направлении в положение $i_1 C'_1$;
3. Через точку C'_1 провести прямую перпендикулярную $i_1 C'_1$;
4. При пересечении построенной прямой дугами радиусов $i_1 A_1$ и $i_1 B_1$ получить точки A'_1 и B'_1 .
5. Построить фронтальные проекции A'_2 и B'_2 .

При вращении геометрической фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, одна из проекций формы (на плоскости $\perp$ оси вращения) не изменяется.

Задача 1. Определить истинную величину отрезка АВ и угол наклона его к плоскости π_1 .

Для решения необходимо поставить отрезок в положение параллельное плоскости проекций π_2 . Этого можно достичь, если повернуть отрезок вокруг оси $\perp \pi_1$ так, чтобы горизонтальная проекция отрезка заняла положение параллельное оси ОХ (рис.5).

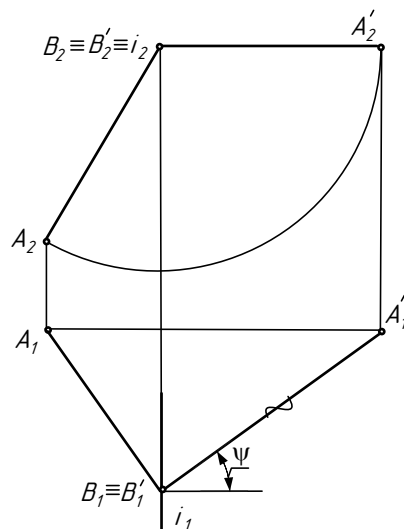
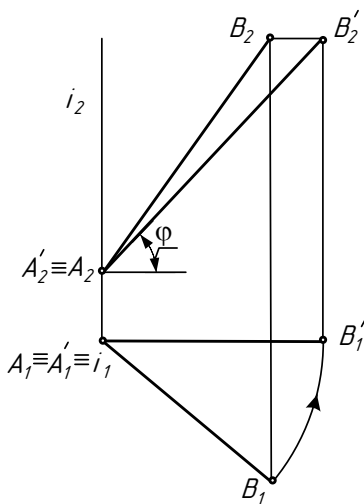


Рис.5

Задача 2. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения в результате вращения стала проецирующей (рис. 6).

Достигается это двойным поворотом прямой вокруг двух различных осей:

1. Поворачиваем отрезок [АВ] до положения, параллельного $\pi_2 [A'_1 B'_1] \parallel OX$.
2. Поворачиваем отрезок [АВ] до положения, перпендикулярного $\pi_1 [A''_2 B''_2] \perp OX$.

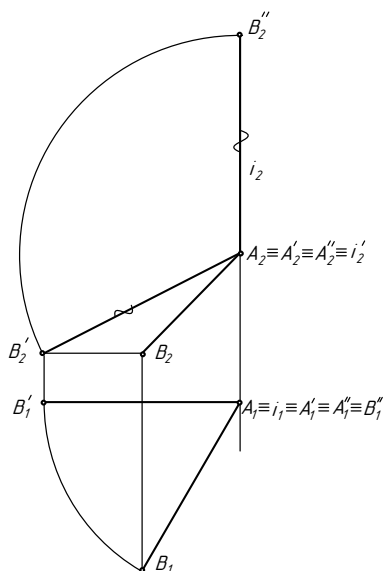


Рис.6

Задача 3. Вращением вокруг оси, перпендикулярной к π_2 , переместить точку A на прямую a (рис.7). Горизонтальная проекция точки A – A_1 перемещаясь по направлению, параллельному оси OX, перемещается на горизонтальную проекцию прямой a в точке A'_1 . A'_2 в проекционном соответствии на проекции a_2 . $[A_1 A'_1]$ делим пополам и получим горизонтальную проекцию оси вращения i_1 . i_2 получим в проекционном соответствии на отрезке $[A_2 A'_2]$.

Задача 4. Повернуть точку A вокруг оси $i \perp \pi_1$ до совпадения с плоскостью тождества (рис.8). При вращении точки вокруг оси $i \perp \pi_1$ фронтальная проекция точки A перемещается по направлению, параллельному оси OX, а горизонтальная по дуге радиуса $[i_1 A_1]$. Пересечение прямой и дуги определяет проекция $A'_2 = A'_1$.

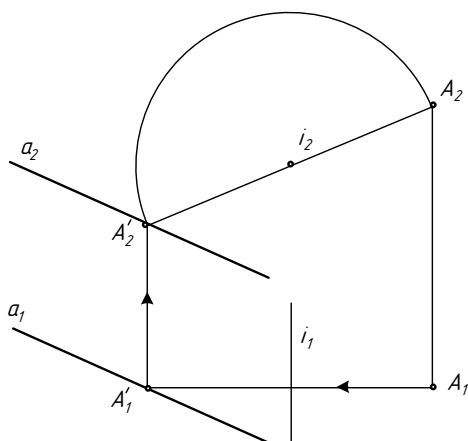


Рис.7

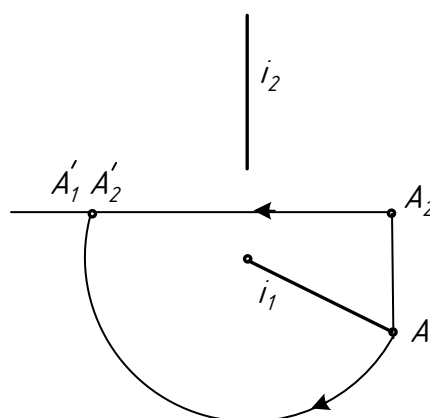


Рис.8.

ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ.

Для того, чтобы повернуть плоскость, достаточно повернуть две ее точки. Новое положение плоскости будет определяться повернутыми точками и неподвижной точкой пересечения плоскости α с осью вращения (рис.9).

Вращение проецирующей плоскости.

Для определения величины геометрических элементов, лежащих в проецирующей плоскости, необходимо ее поставить в положение, параллельное плоскости проекций (рис.10). Повернув фронтальную проекцию $A_2 B_2 C_2$ вокруг i_2 до положения, параллельного OX. На π_1 проекции B_1 и C_1 , перемещаясь параллельно OX, определяют истинную величину треугольника $A'_1 B'_1 C'_1$.

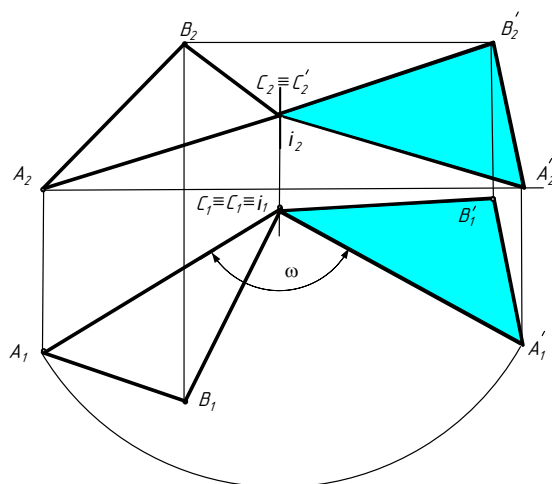


Рис.9

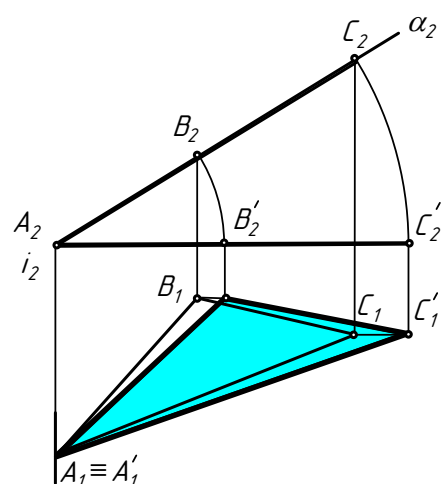


Рис.10.

Вращение плоскости общего положения до положения проецирующей.

При вращении плоскости вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций π_1 , угол между вращаемой плоскостью π_1 не меняется, аналогично при вращении плоскости вокруг оси, перпендикулярной π_2 , угол между вращаемой плоскостью и плоскостью π_2 остается неизменным. Второй угол вращаемой плоскости с плоскостью проекций, параллельной оси вращения, изменяется. В результате его изменения вращаемая плоскость может стать перпендикулярной к плоскости проекций, т.е. проецирующей.

Для то, чтобы плоскость общего положения перевести в положение фронтально-проецирующей, ось вращения следует брать перпендикулярной π_1 ; перевод плоскости в положение горизонтально-проецирующей осуществляется поворотом ее вокруг оси перпендикулярной к π_2 .

Для необходимого в этих случаях угла поворота удобно пользоваться главными линиями плоскости (рис.11).

Определение истинной величины геометрических элементов, лежащих в плоскости общего положения осуществляется последовательным поворотом этой плоскости вокруг двух осей перпендикулярных плоскостям проекций (рис.12).

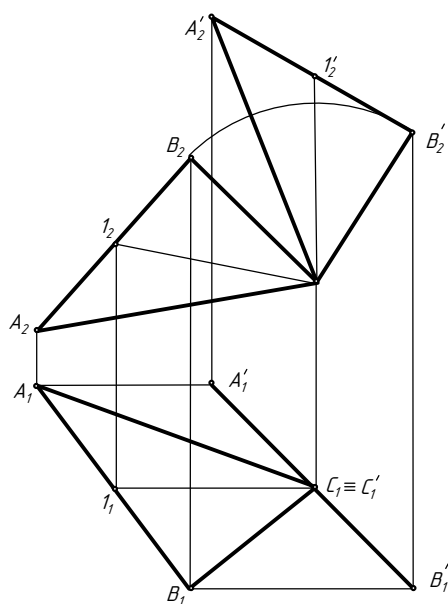


Рис.11.

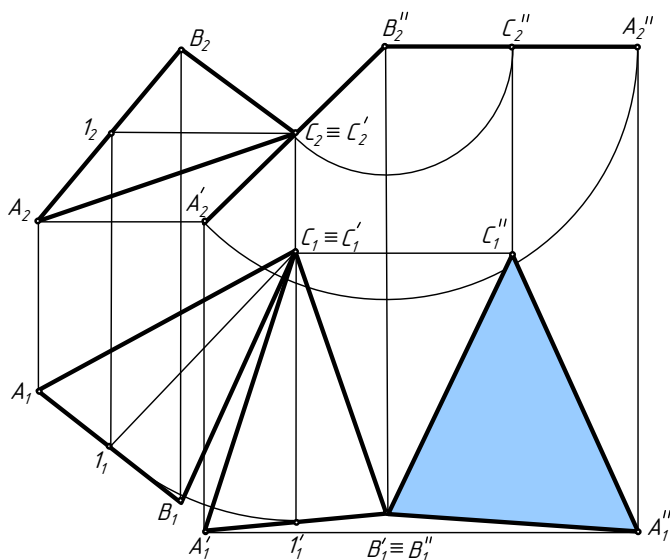


Рис.12

6.2. Вращение плоскости вокруг осей, параллельных плоскостям проекций.

Вращение плоскости общего положения до положения, параллельного одной из плоскостей проекций, может быть произведено вокруг одной из ее главных линий (рис.13).

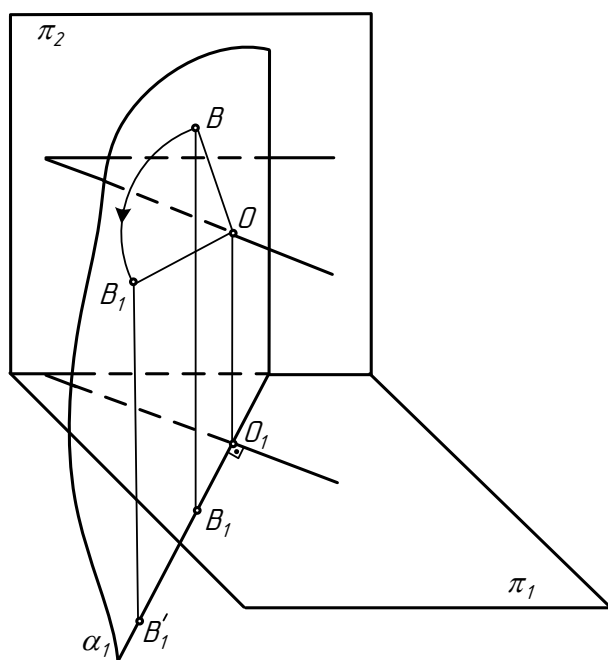


Рис.13

При этом необходимо отметить, что при вращении точки вокруг оси параллельной плоскости проекций эта точка движется в плоскости α перпендикулярной как к оси вращения, так и к той плоскости проекций, какой ось вращения параллельна. Отсюда следует, что одна проекция вращающейся точки всегда будет находиться на линии пересечения проецирующей ее плоскости с плоскостью проекций. Вторая проекция точки движется по эллипсоиду.

Определение истинной величины треугольника ABC вращением вокруг горизонтали показано на рис.14. Ось вращений h проходит через точку C, которая остается неподвижной, то есть $C_1 \equiv C$. Точка B вращается вокруг h по дуге радиуса $[OB]$. Горизонтальная проекция радиуса $[O_1B_1] \perp h_1$, фронтальная проекция - $[O_2B_2]$ - в проекционном соответствии. По двум проекциям способом треугольника, определяем истинную величину радиуса

вращения. Так как точка B вращается вокруг горизонтали в плоскости $\gamma_1 \perp h_1$, то откладывая истинную величину радиуса $[O_1B]$ на γ_1 , получим точку B.

Точка A находится на стороне треугольника B_1A_1 , кроме того она вращается вокруг h в плоскости β_1 . В пересечении B_1A_1 и β_1 получим точку A.

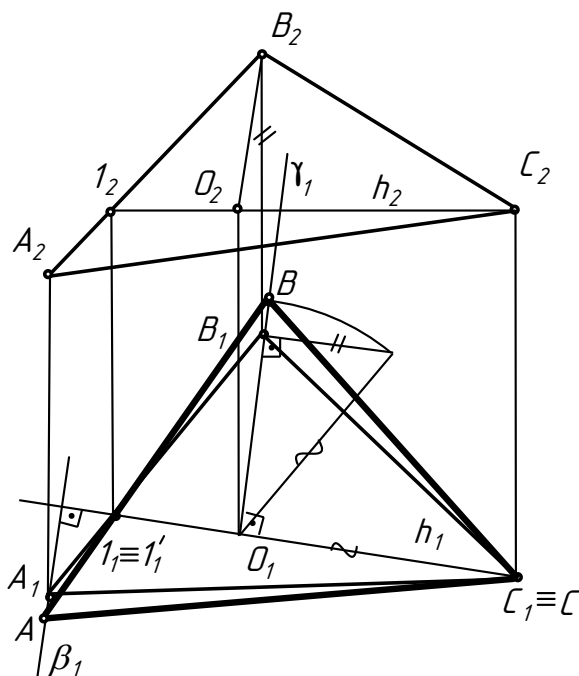


Рис.14

ЛЕКЦИЯ 7.

7.1. ГРАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И МНОГОГРАННИКИ.

Гранные поверхности образуются перемещением прямолинейной образующей ℓ по ломаной направляющей m . При этом, если одна точка S образующей неподвижна, получается пирамидальная поверхность, если же при перемещении образующая параллельна заданному направлению, то создается призматическая поверхность (рис.1).

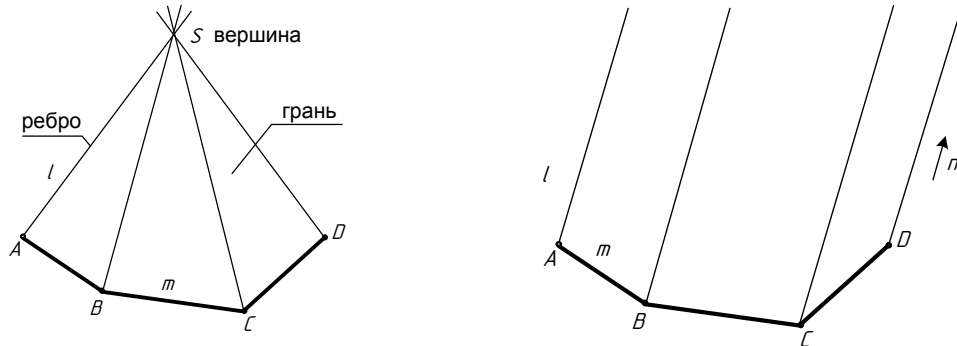


Рис. 1.

Элементами граничных поверхностей являются: вершина S (у призматических поверхностей она находится в бесконечности), грань (часть плоскости, ограниченная одним участком направляющей m и крайними относительно его положениями образующей ℓ), ребро (линия пересечения смежных граней).

Определитель пирамидальной поверхности включает в себя вершину S , через которую проходят образующие, и направляющую: $S \in \ell; \ell \cap m$.

Определитель призматической поверхности содержит направление n , которому параллельны все образующие ℓ поверхности: $\ell \parallel n, \ell \cap m$.

Замкнутые граничные поверхности, образованные некоторым числом (не менее четырех) граней, называются многогранниками. Из числа многогранников выделяют группу правильных многогранников, у которых все грани правильные и равные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней. Например, тетраэдр – правильный четырехгранник, а гексаэдр – куб, октаэдр – многогранник.

Пирамида – многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной S .

На комплексном чертеже пирамида задается проекциями ее вершин и ребер. Видимость ребер определяется с помощью конкурирующих точек (рис.2).

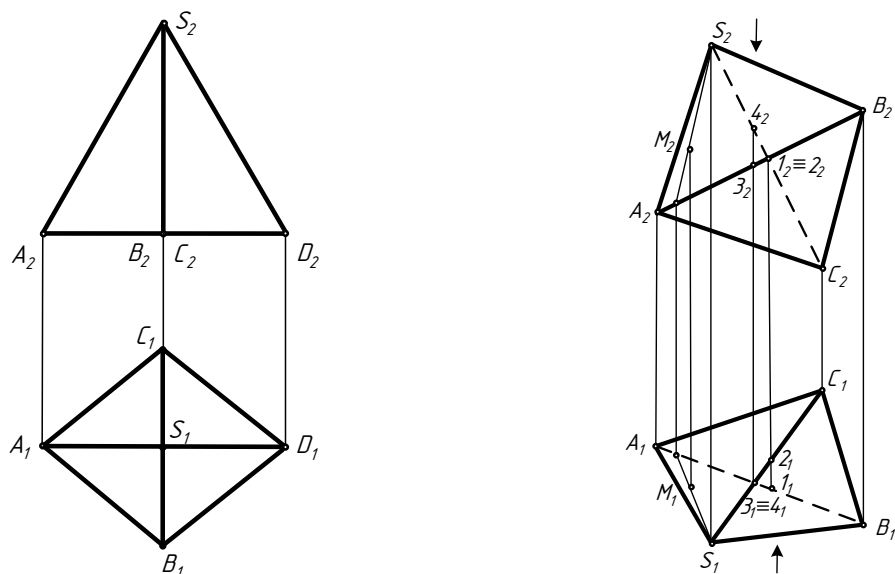


Рис. 2.

Призма – многогранник, у которого основания – два одинаковых и взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани – параллелограммы.

Если ребра призмы перпендикулярны плоскости основания, то такую призму называют прямой (рис.3).

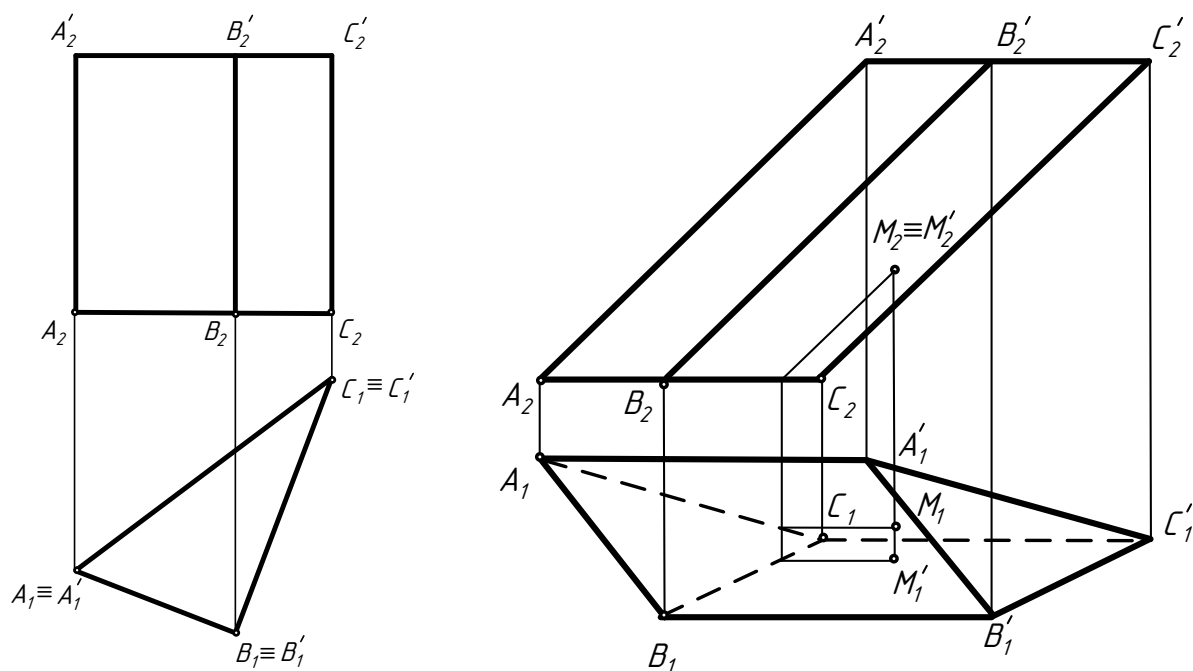


Рис. 3.

Пересечение гранной поверхности плоскостью.

При пересечении гранной поверхности с плоскостью получается плоская ломаная линия. Фронтальные проекции $1_2 2_2 3_2$ точек 123 пересечения ребер призмы ABC с плоскостью α_2 находятся непосредственно в пересечении следа плоскости α_2 с фронтальными проекциями ребер (рис.4).

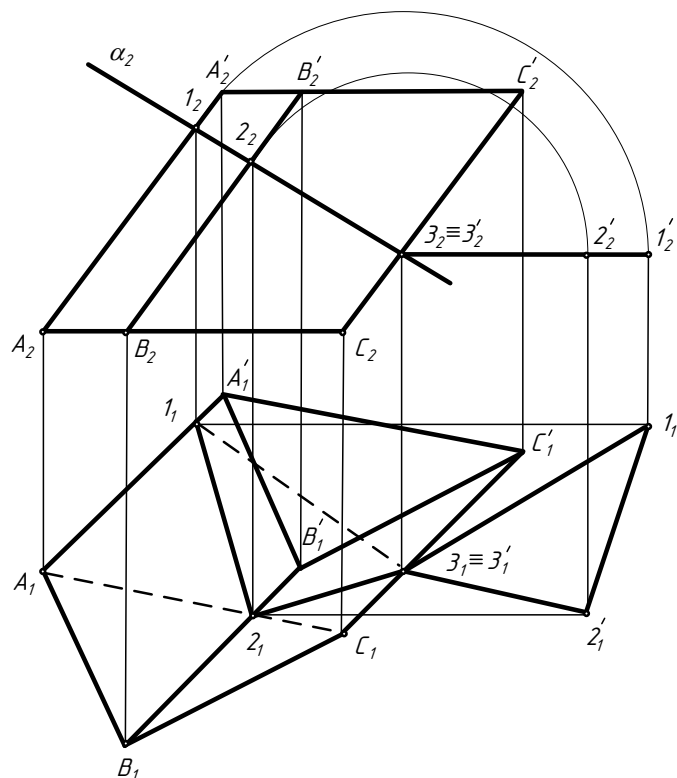


Рис.4

Пересечение прямой линии с гранной поверхностью.

Задача на пересечение прямой линии с поверхностью многогранника проще всего решается построением через данную прямую проецирующей плоскости. Такая плоскость, пересекая многогранник, дает многоугольник, точки пересечения сторон которого с данной прямой и являются искомыми точками (рис.5).

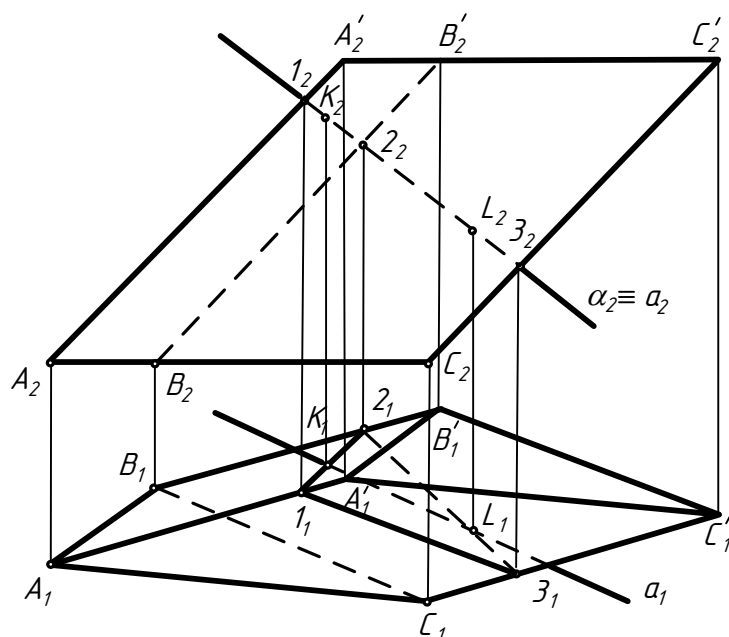


Рис.5а

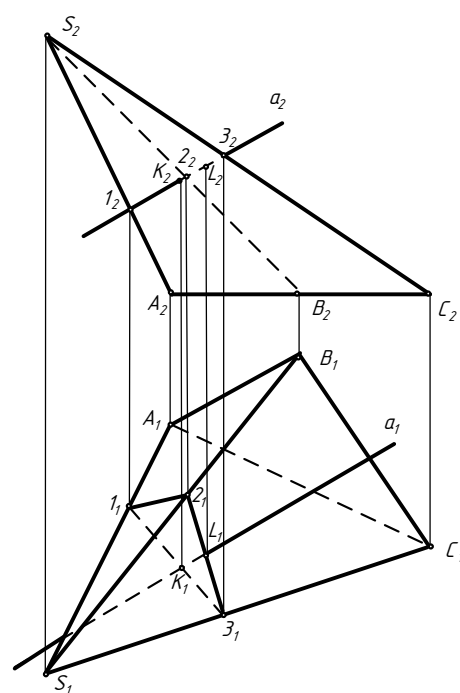


Рис.5б

Развертки поверхностей многогранников.

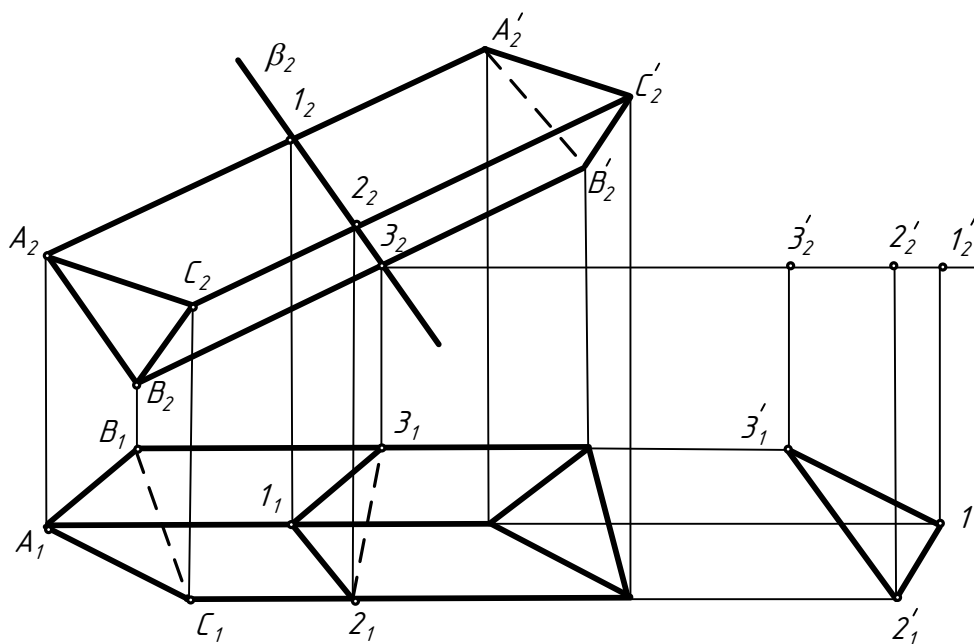


Рис.6

Линию нормального сечения разворачиваем в прямую и через точки 1, 2, 3 проводим прямые, перпендикулярные развертке линии нормального сечения.

На каждом из построенных перпендикуляров откладывают по обе стороны от линии 3 – 3 отрезки, соответствующие истинным величинам длин ребер призмы выше и ниже линии нормального сечения. Полученные точки соединяем и пристраиваем оба основания.

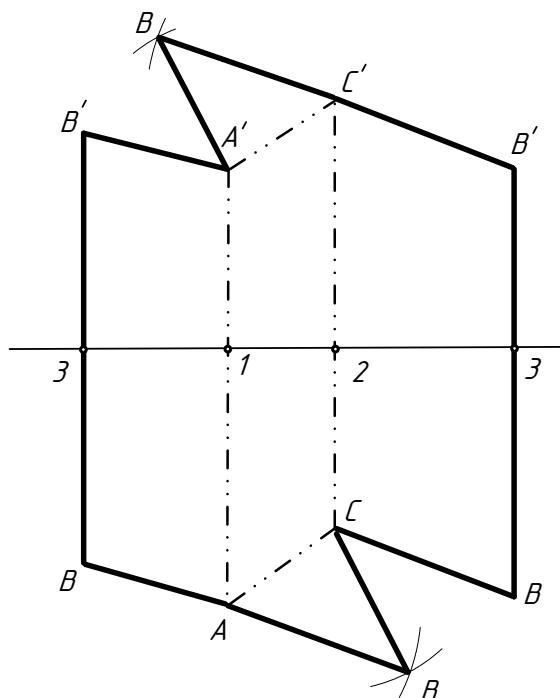


Рис.7

Сначала строим развертку всей пирамиды, состоящую из натуральных величин боковых граней, а затем от вершины откладываем истинные величины отрезков S1, S2, S3. Чтобы получить полную развертку, пристраиваем верхние и нижние основания.

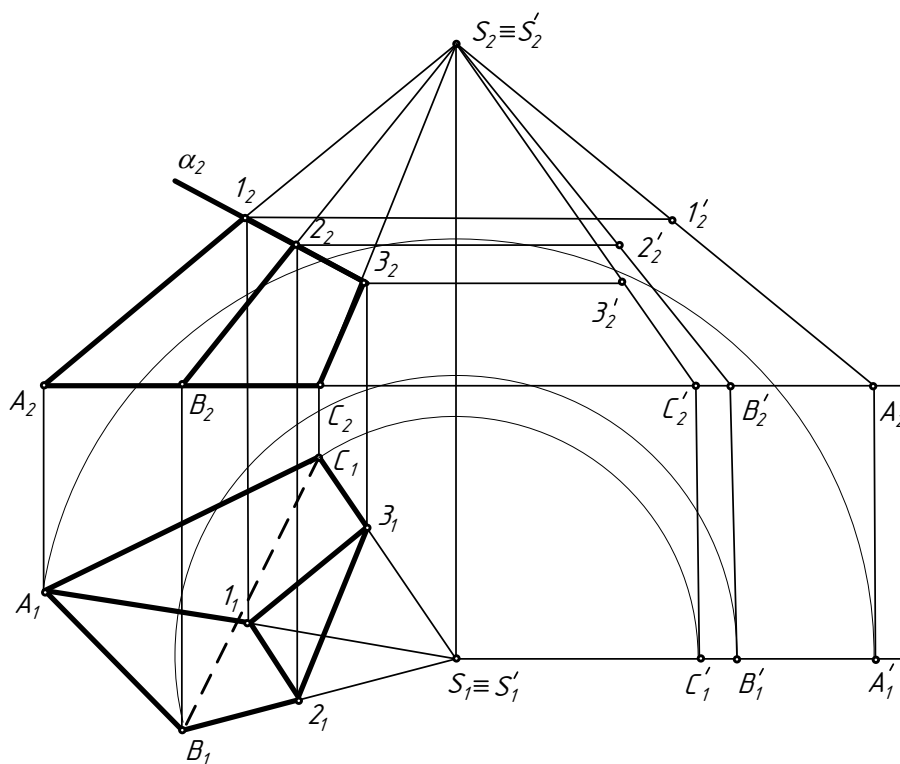


Рис.8

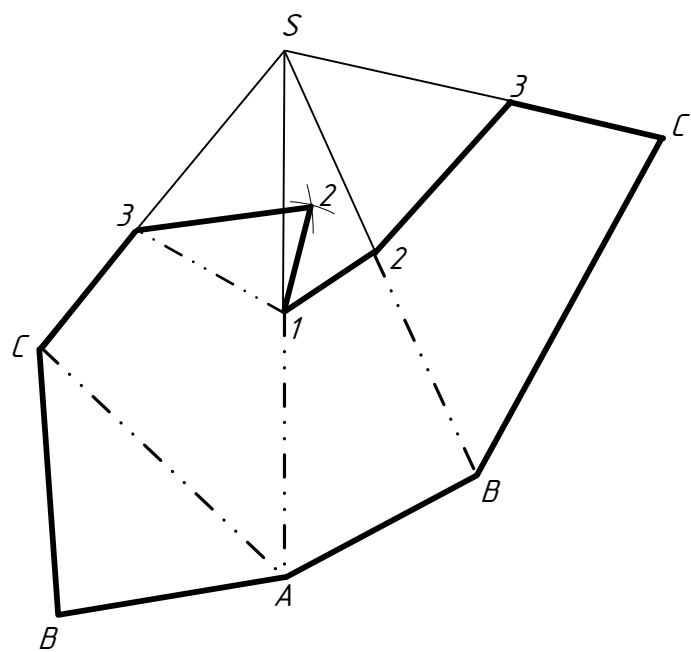


Рис. 9